

Die Anwendung der Linearen Programmierung in der Regionalplanung mit besonderer Berücksichtigung des Dekompositionsverfahrens

Inaugural-Dissertation

Zur Erlangung des Grades
Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)
An der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ali Söylemezoglu

1976

1975

Die Anwendung der Linearen Programmierung in der Regionalplanung mit besonderer Berücksichtigung des Dekompositionsverfahrens

Inaugural-Dissertation

**Zur Erlangung des Grades
Doctor rerum politicarum (Dr. rer. pol.)
An der
Ludwig-Maximilians-Universität München**



vorgelegt von

Ali Söylemezoglu

1975

Referent: Prof. Dr. E. von Böventer

Korreferent: Prof. Dr. C. Hillinger

Promotionsabschlußberatung: 23. Februar 1976



GLIEDERUNG

	<u>Seite</u>
1. EINFÜHRUNG	1
2. ENTWICKLUNG DES GRUNDMODELLS	6
2.1 Modell ohne Transportaktivitäten	6
2.2 Einführung der Transportaktivitäten	12
2.3 Einführung von Konsumfunktionen	17
2.4 Einführung von Nachfragekurven	22
2.41 Das Problem der Preiskonsistenz	22
2.42 Lineare Formulierung des Cournot-Enke- Problems	25
2.43 Das erweiterte Modell	30
3. LÖSUNGSSALGORITHMEN	40
3.1 Algorithmus von Mennes, Tinbergen und Waardenburg	40
3.2 Kritik	52
3.3 Das Verfahren von Aleshin und Mednitzki	55
3.4 Vergleich der beiden Verfahren und Kritik	62
3.5 Interpretation des Problems als lineares Spiel und Lösung durch fiktives Abspielen ..	64
3.51 Die Iteration	72
3.52 Interpretation als dynamischer Anpassungs- prozeß auf räumlich getrennten Märkten	76
3.53 Vergleich mit der Methode der Zwei-Ebenen-Planung von Kornai	77
4. VARIATIONEN DES GRUNDMODELLS	81
4.1 Endogene Behandlung von Transport- aktivitäten	81
4.2 Maximierung einer gesellschaftlichen Nutzenfunktion mit konstanten Grenznutzen ..	85

	<u>Seite</u>
4.3 Maximierung einer gesellschaftlichen Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen ..	87
4.31 Das Problem des Marktgleichgewichts als Optimierungsproblem	87
4.32 Lineare Formulierung der Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen	92
5. MATHEMATISCHE ASPEKTE	102
5.1 Beweis der Konvergenz	102
5.2 Das Kriterium zur Beendung der Iteration	120
5.3 Die Beziehung zur Partitionsmethode von Benders	123
6. ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN	126
VERZEICHNIS DER ZITIERTEN WERKE	128

LEBENSLAUF

EHRENWÖRTLICHE ERKLÄRUNG

1. EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, einen Beitrag zur Erweiterung der Verwendungsmöglichkeiten der linearen Programmierung in der Regionalplanung zu leisten. Es werden lineare Modelle aufgestellt, die im wesentlichen Weiterentwicklungen des von Aleshin und Mednitzki¹⁾ vorgeschlagenen Modells sind. An Hand dieser Modelle werden alternative Algorithmen diskutiert, die auf verschiedenen Dekompositionsverfahren basieren. Die Lösungsverfahren werden gleichzeitig als dezentrale Entscheidungsmodelle interpretiert.

Die Verknüpfung der Modellkonstruktion mit der Diskussion und Entwicklung von algorithmischen Methoden ist nicht zufällig. Diese beiden Bereiche unserer Arbeit hängen vielmehr zusammen, da einerseits die Ausarbeitung von effizienten Lösungsverfahren den Boden für die Aufstellung von detaillierteren Modellen bereitet, mit denen die komplexen Wechselbeziehungen im Raum abgebildet werden können, und umgekehrt die speziellen räumlichen Modelle mit ihren charakteristischen Strukturen das Material liefern, aus dem spezielle Lösungsverfahren entwickelt werden müssen.

Wenn wir mit von Böventer drei Hauptentwicklungsrichtungen der reinen Theorie der Standortwahl unterscheiden²⁾, müssen wir diese Arbeit der industriellen Standortlehre zuordnen. Insofern als eine möglichst realitätsnahe

1) Aleshin, S. und Mednitzki, V., "Algorithm Problems in an Interregional Interindustry Model," Papers of the Regional Science Association, 24 (1970), S. 171-181. Vgl. Arianin, A. und Nikolaev, S. "Interregional and Intra-Regional Analysis of the Location of Productive Forces," Papers of the Regional Science Association, 24 (1970), S. 163-170.

2) E. von Böventer, Theorie des Räumlichen Gleichgewichts (Tübingen, 1962), S. 2.

Erfassung der Wechselbeziehungen zwischen einzelnen Regionen und Sektoren angestrebt wird, nähern sich die benützten Modelle den gesamtwirtschaftlichen Totalmodellen, ohne jedoch die Beschränkungen des Partialansatzes gänzlich überwinden zu können.

In dem bekannten Aufsatz von Samuelson¹⁾ wird zum ersten Mal die Methode der linearen Programmierung auf standorttheoretische Probleme angewandt. Es folgen die Arbeiten von Beckmann und Marschak²⁾, von Lefebvre³⁾ und von Stevens⁴⁾, die die allgemeine Form von standorttheoretischen linearen Programmierungsmodellen entwickelten. Auf dieser Grundlage wurden in den letzten zwei Jahrzehnten eine große Zahl von Modellen entworfen und auch empirisch erprobt. Einen guten Überblick darüber findet man in den beiden neueren Veröffentlichungen von Takayama und Judge⁵⁾.

Die in der Fortführung dieser Linie entwickelten Modelle gehen von einer gegebenen räumlichen Verteilung der Ressourcen und der Endnachfragemengen sowie von gegebenen Produktionsfunktionen und Transportkosten oder Transportfunktionen aus. Sie determinieren dann eine relativ zu einer gegebenen

-
- 1) Samuelson, P. A., "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming," American Economic Review, 42 (1952), S. 283-303.
 - 2) Beckmann, M.J. und Marschak, T., "An Activity Analysis Approach to Location Theory," in: Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Hrsg. H. A. Antosiewicz (Washington, D.C., 1955), S. 357-377.
 - 3) Lefebvre, L., Allocation in Space (Amsterdam, 1958).
 - 4) Stevens, B.H., "An Interregional Linear Programming Model," Journal of Regional Science, 1 (1959), S. 60-98.
 - 5) Takayama, T. und Judge, G.G., Spatial and Temporal Price and Allocation Models (Amsterdam, 1971), sowie Judge, G.G. und Takayama, T., Hrsg. Studies in Economic Planning Over Space and Time (Amsterdam, 1973).

Zielfunktion optimale Verteilung der Produktionsaktivitäten im Raum sowie die optimale Struktur der Transportflüsse zwischen den einzelnen Regionen. Dabei können mehrere Güter und Zwischenprodukte berücksichtigt werden. Takayama und Judge haben mit ihrem Aufsatz¹⁾ gezeigt, wie die Annahme von gegebenen Angebots- und Nachfragemengen durch die allgemeinere Annahme von gegebenen (preiselastischen) Angebots- und Nachfragefunktionen ersetzt werden kann. Es ergeben sich damit lineare Modelle mit einer (im Falle von linearen Nachfrage- und Angebotsfunktionen) quadratischen Zielfunktion.

Im folgenden werden wir dennoch nicht diese Modelle als Ausgangspunkt wählen, sondern das Modell von Aleshin und Mednitzki, da das letztere die Struktur der ökonomischen Beziehungen im Raum adäquater widerspiegelt. Bezüglich seiner Annahmen unterscheidet er sich nicht von den bereits genannten linearen Modellen. Im Teil 2 verallgemeinern wir dieses Modell, indem wir Variationen der Endnachfragemengen in Abhängigkeit von Regionaleinkommen und den Preisen zulassen. Die Berücksichtigung der Einkommensabhängigkeit erfolgt durch den Einbau von Konsumfunktionen Keynesianischen Typs. Im Unterschied zu Takayama und Judge werden in unserem Modell die regionalen Nachfragefunktionen mit Hilfe von Treppenfunktionen approximiert, sodaß die Linearität erhalten bleibt.

Im Teil 3 werden zunächst zwei Lösungsverfahren diskutiert, die von Mennes, Tinbergen und Waardenburg²⁾ und von

1) Takayama, T. und Judge, G.G., "Equilibrium Among Spatially Separated Markets: A Reformulation," Econometrica, 32 (1964), S. 510-524.

2) Mennes, L.B.M., Tinbergen, J. und Waardenburg, J.G., The Element of Space in Development Planning (Amsterdam, 1968), S. 117-133.

Aleshin und Mednitzki¹⁾ formuliert wurden. Danach erfolgt die Darstellung eines eigenen Verfahrens, das mit der bekannten Methode der Zwei-Ebenen-Planung von Kornai²⁾ verwandt ist. Es zeigt sich, daß dieses Verfahren auch als ein dynamischer Anpassungsprozess auf räumlich getrennten Märkten, analog dem Cobweb Modell, interpretiert werden kann. Aus der Konvergenz des Verfahrens folgt die Stabilität des Anpassungsprozesses. Mit anderen Worten, das Lösungsverfahren kann auch als ein konstruktiver Beweis für die Stabilität aufgefaßt werden.

Im Teil 4 wird das Modell des 2. Teils durch endogene Behandlung von Transportaktivitäten verallgemeinert. Anschließend zeigen wir, wie eine gesellschaftliche Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen im Rahmen eines linearen Modells maximiert werden kann. Dabei muß einschränkend angenommen werden, daß der Grenznutzen eines jeden Gutes von den verbrauchten (d.h. nachgefragten) Mengen der anderen Güter unabhängig ist³⁾.

Die Beweise für die behaupteten Eigenschaften des vorgeschlagenen Algorithmus liefern wir im Teil 5. Dabei wird auch die Beziehung zum bekannten Algorithmus von Benders⁴⁾ sichtbar. Der von uns vorgeschlagene Algorithmus hat in dieser konkreten Fragestellung gegenüber dem Algorithmus von Benders den Vorzug, daß die Struktur des ursprünglichen Problems voll erhalten bleibt. Somit stellt

1) Aleshin und Mednitzki, "Algorithm Problems", a.a.O.

2) Kornai, J., Mathematische Methoden bei der Planung der Ökonomischen Struktur (berlin, 1967).

3) Mit anderen Worten, es muß für alle Güter $i, j=1, \dots, n$ und $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

gelten.

4) Benders, J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems," Numerische Mathematik, 4 (1962), S. 238-252.

das entwickelte Verfahren ein aus rechentechnischen Gesichtspunkten effiziente und zur Interpretation als dynamisches Modell für räumlich getrennte Märkte geeignete Methode dar.

2. ENTWICKLUNG DES GRUNDMODELLS

2.1 Modell ohne Transportaktivitäten

Bekanntlich können die klassischen Außenhandelsmodelle als eine erste Annäherung zur Berücksichtigung der räumlichen Dimension angesehen werden. Die in diesem Zusammenhang zu betonende Eigenart dieser Modelle liegt darin, daß sie die Produkte als völlig beweglich (das heißt ohne Transportkosten), die Produktionsfaktoren hingegen als völlig unbeweglich (das heißt unendlich große Transportkosten) voraussetzen. Diese Vorgehensweise kann für die Konstruktion von einfachsten linearen räumlichen Modellen übernommen werden¹⁾. Wir wollen diese Darstellungsweise benützen, um die Grundstruktur des eigentlichen Modells zu erläutern. Es wird also zunächst ein Modell beschrieben, das analog den Modellen der reinen Theorie des internationalen Handels aufgebaut ist.

In unseren Überlegungen nehmen wir durchgehend einen gitterförmigen Raum an. Wir betrachten einen Raum, der nicht kontinuierlich ist, sondern aus diskreten Punkten besteht. Eine solche Annahme ist aus Erwägungen der Operationalität fast unumgänglich. Dabei kann der reale, kontinuierliche Raum durch Erhöhung der Zahl der Punkte beliebig approximiert werden.

Die Punkte des angenommenen Raumgitters stellen unsere Regionen dar. Auf die Problematik der Abgrenzung solcher Regionen kann hier nicht eingegangen werden²⁾.

In einem zweiten Schritt müssen alle Inputs und Outputs³⁾

1) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, "The Element of Space in Development Planning," a.a.O., S. 6 und S. 30.

2) Vgl. ebd., S. 50.

3) Im Anschluß an die in der Aktivitätenanalyse gebräuchlichen Terminologie unterscheiden wir keine Produkte und Produktionsfaktoren und benützen statt dessen die allgemeine Bezeichnung "Input" und "Output".

in zwei Klassen eingeteilt werden. Die erste Klasse enthält alle diejenigen Inputs und Outputs, deren Transportkosten so niedrig sind, daß sie vernachlässigt werden können. Diese bezeichnen wir als mobil. Die zweite Klasse enthält die immobilen Inputs und Outputs, deren Transportkosten so hoch sind, daß sie nur in den Regionen, in denen sie sich befinden, verbraucht werden können. Mit anderen Worten, der Transport der immobilen Güter ist von vorneherein ausgeschlossen.

Die regionale Endnachfrage nach jedem Gut sei bekannt und durch b_i^r gegeben. Dabei beziehen sich der Index $i=1,\dots,m$ auf die Art des Gutes und der Index r auf die Region, wobei er von 1 bis q läuft. Da b_i^r eine Nachfragemenge darstellt, gilt $b_i^r \geq 0$. Die Nachfragemengen werden durch Variationen der Preise und der regionalen Einkommen nicht verändert. Sie geben lediglich die Höhe des Endverbrauchs an, der produktive Verbrauch ist hierin nicht enthalten.

Die regionale Ausstattung mit Gut i (Produktionskapazitäten, Arbeitskräfte, natürliche Ressourcen, Lagerbestände an End- und Zwischenprodukten) sei ebenfalls durch b_i^r gegeben, wobei allerdings $b_i^r \leq 0$ gilt ($i=1,\dots,m$; $r=1,\dots,q$)

In jeder Region können höchstens n Produktionsprozesse x_j^r ($j=1,\dots,n$; $r=1,\dots,q$) verwendet werden. Diese Prozesse können von Region zu Region unterschiedlich sein. Die Produktionskoeffizienten a_{ij}^r geben, wenn sie positiv sind, den Output an Gut i pro Aktivitätsniveau an. Wenn sie negativ sind, kennzeichnen sie den Input des Gutes i pro Aktivitätsniveau der Aktivität j .

Die Koeffizienten c_j^r geben die Kosten der Aktivität j in der Region r an. Wir nehmen an, daß die Minimierung

der Produktionskosten insgesamt (über alle q Regionen) das Ziel ist. Dabei muß die regionale Nachfrage befriedigt und die Restriktionen bezüglich der Ausstattung berücksichtigt werden. Diesen Annahmen entsprechend erhalten wir das folgende Modell:

$$\sum_r^q \sum_{j=1}^n a_{ij}^r x_j^r \geq \sum_r^q b_i^r \quad (2.1a)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad (2.1b)$$

$$i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q$$

$$x_j^r \geq 0$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r \longrightarrow \text{Min} \quad (2.1c)$$

Die Unterscheidung zwischen mobilen ($i=1, \dots, k$) und immobilen ($i=k+1, \dots, m$) Gütern kommt in der Einteilung der Restriktionen in die beiden Gruppen 2.1a und 2.1b zum Ausdruck. Die erste Gruppe von Ungleichungen, die die mobilen Güter enthält, betrifft alle Regionen gemeinsam, da das Defizit einer Region durch die Überschüsse der anderen Regionen ausgeglichen werden können. Die zweite Gruppe der Ungleichungen bezieht sich auf die immobilten Güter. Hier sind die Restriktionen jeder Region unabhängig von den Restriktionen der anderen Regionen.

Das zu 2.1 duale Problem lautet:

$$\sum_{i=1}^k a_{ij}^r \pi_i + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r \leq c_j^r \quad (2.2a)$$

$$\pi_i, \pi_i^r \geq 0$$

$$j=1, \dots, n; \quad r=1, \dots, q$$

$$\sum_{i=1}^k \pi_i \sum_r b_i^r + \sum_{i=k+1}^m \sum_{r=1}^q b_i^r \pi_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (2.2b)$$

Die dualen Variablen π_i und π_i^r können als Preise interpretiert werden, und zwar Preise in den Einheiten der Kostengröße, wie sie in die Definition der Zielfunktion einging. Ihre optimalen Werte geben an, um wieviel die Kosten gesenkt werden könnten, wenn der Bedarf des betreffenden Gutes um eine Einheit abnimmt beziehungsweise die Ausstattung mit der betreffenden Ressource um eine Einheit zunimmt.

Die Preise der mobilen Güter π_i müssen in jeder Region gleich sein, da sonst so lange Transportflüsse zwischen den Regionen stattfinden würden, bis sie ausgeglichen sind. Dagegen kann von den Preisen der immobilien Güter π_i^r angenommen werden, daß sie in der Regel verschieden sein werden.

Das Modell 2.1 ist bereits sehr früh entwickelt und diskutiert worden¹⁾ Selbst in dieser simplen Form erlaubt es die Berücksichtigung regional unterschiedli-

1) Dantzig, G.B., Lineare Programmierung und Erweiterungen (Berlin, 1966), S. 507 f.

cher Produktionsfunktionen, von Zwischenprodukten und von Kuppelproduktion. Steigende Grenzkosten können durch Einführung von oberen Schranken für die einzelnen Aktivitäten näherungsweise berücksichtigt werden. Externe Effekte und abnehmende Grenzkosten können hingegen nicht berücksichtigt werden.

Die Formulierung des Modells 2.1 setzt voraus, daß es möglich ist, allein an Hand der Höhe der Transportkosten die Güter in mobile und immobile Gruppen einzuteilen. Diese Vorgehensweise kann nur dann zu brauchbaren Ergebnissen führen, wenn nicht nur die Transportkosten sondern auch die regionalen Preisunterschiede (zumindest näherungsweise) a priori bekannt sind, da die Richtung und Höhe der Transportflüsse neben den Transportkosten auch von diesen abhängen¹⁾. Daher ist die Einteilung in mobile und immobile Güter auch von den Preisunterschieden abhängig.

Der Modellansatz ist mit der reinen Theorie des internationalen Handels weitgehend identisch. Ein im Prinzip ähnliches Modell wird für regionale Planungszwecke von Mennes, Tinbergen und Waardenburg vorgeschlagen²⁾. Ein gutes und ausführlich diskutiertes Beispiel für die empirische Arbeit mit solchen Modellen liefert R. Carrillo-Arronte³⁾.

Das einfache Grundmodell 2.1 wird erweitert, indem wir Transportaktivitäten einführen, die die Beziehungen zwischen den Regionen herstellen. Die Berücksichtigung der Transportkosten kann auf zwei verschiedenen Wegen erfolgen. Der theoretisch korrekte Weg wäre⁴⁾, die

1) Von Böventer, Theorie des Räumlichen Gleichgewichts, a.a.O., S.28.

2) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O., S. 49-72.

3) Carrillo-Arronte, R., An Empirical Test in Interregional Planning (Rotterdam, 1970).

4) Von Böventer, ebd.. S.38.

Transportaktivitäten wie jede andere Produktionsaktivität zu behandeln. Diese Vorgehensweise würde implizieren, daß die Transportaktivitäten eine Reihe von knappen Ressourcen verbrauchen und daß daher die durchschnittlichen Transportkosten für ein gegebenes Gut auf einer gegebenen Strecke nicht unabhängig von den Aktivitätsniveaus der übrigen Wirtschaft sein können¹⁾.

Im Gegensatz dazu ist es in den standorttheoretischen linearen Programmierungsmodellen üblich, von diesem Zusammenhang zu abstrahieren und die Transportaktivitäten als "exogen" zu behandeln: Sie verursachen zwar Kosten und gehen auf diese Weise in die Zielfunktion ein, diese Kosten sind jedoch unabhängig von der Höhe der übrigen Aktivitäten²⁾. Ein solcher Ansatz kann berechtigt sein, wenn das zur Diskussion stehende Modell einen ausgeprägten partialanalytischen Charakter besitzt, so daß Rückwirkungen auf den Rest der Wirtschaft vernachlässigbar bleiben.

Bei der Konstruktion von gesamtwirtschaftlichen Modellen empfiehlt es sich hingegen, dem Ansatz von Lefebvre zu folgen und die Transportaktivitäten endogen zu behandeln. Wir werden im folgenden zunächst den für die standorttheoretischen Modelle üblichen Ansatz wählen und die Transportaktivitäten exogen behandeln. Danach werden wir zeigen, daß auch die endogene Behandlung von Transportaktivitäten im Rahmen linearer Modelle keine Schwierigkeiten verursacht und die Anwendung der gleichen Lösungsverfahren erlaubt.

1) Vgl. Lefebvre, Allocation in Space, a.a.O. S. 17-19.

2) S. Judge und Takayama, Studies, a.a.O. S. 225-329.

2.2 Einführung von Transportaktivitäten

Als erstes definieren wir für die mobilen Güter

$i=1, \dots, k$

Output- und Inputkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{Outputkoeffizient } p_{ij}^r &= a_{ij}^r, \text{ wenn } a_{ij}^r \geq 0 & i=1, \dots, k; \\ \text{und} & & r=1, \dots, q; \\ \text{Inputkoeffizient } v_{ij}^r &= |a_{ij}^r|, \text{ wenn } a_{ij}^r < 0 & j=1, \dots, n; \end{aligned}$$

Ebenso ordnen wir die Konstanten der rechten Hand:

$$\begin{aligned} \text{Ausstattungs- menge: } s_i^r &= |b_i^r|, \text{ wenn } b_i^r < 0 & (i=1, \dots, k; \\ \text{und} & & r=1, \dots, q) \\ \text{Endnachfragemenge } d_i^r &= b_i^r, \text{ wenn } b_i^r \geq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, wie man sofort sieht:

$$p_{ij}^r - v_{ij}^r = a_{ij}^r \quad \text{und} \quad d_i^r - s_i^r = b_i^r$$

Nun definieren wir Transportaktivitäten

$$\sum_i^{g,h} \quad \begin{aligned} g, h &= 1, \dots, q \\ i &= 1, \dots, k \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich der Index i auf die Art des transportierten Gutes, g und h zeigen an, daß das Transport von der g -ten Region in die h -te Region erfolgt. Gleichzeitig werden Transportkostenkoeffizienten

$$f_i^{g,h} \quad \begin{aligned} g, h &= 1, \dots, q \\ i &= 1, \dots, k \end{aligned}$$

definiert, die den Beitrag dieser Aktivität zur

Zielfunktion angeben. Wir erhalten damit das Modell:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_{g=1}^q z_i^{rg} &\geq -s_i^r \\ &\left\{ \begin{array}{l} i=1, \dots, k \\ r=1, \dots, q \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (2.3a)$$

$$-\sum_j^n v_{ij}^r x_j^r + \sum_h^q z_i^{hr} \geq d_i^r \quad (2.3b)$$

$$\sum_j^k a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad \begin{array}{l} i=k+1, \dots, m \\ r=1, \dots, q \end{array} \quad (2.3c)$$

$$x_j^r, z_i^{hg} \geq 0$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q z_i^{hg} f_i^{hg} \rightarrow \text{Min} \quad (2.3d)$$

Die Transportaktivitäten z_i^{gh} werden so definiert, daß sie lediglich die Mengen enthalten, die in der Zielregion tatsächlich produktiv oder konsumtiv verbraucht werden. Transitlieferungen sind in diesen Größen nicht enthalten.

Das duale Problem zu 2.3 lautet:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r \gamma_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r \leq c_j^r \quad (2.4a)$$

$$r = 1, \dots, q; \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sigma_i^h + \gamma_i^g \leq f_i^{hg} \quad (2.4b)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad h, g = 1, \dots, q$$

$$v_i^r, \sigma_i^r, \pi_i^r \geq 0$$

$$\sum_r \sum_i^k d_i^r \gamma_i^r - \sum_r \sum_i^k s_i^r \sigma_i^r + \sum_r \sum_{i=k+1}^m b_i^r \pi_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (2.4c)$$

Wir nehmen an, daß die intraregionalen Transporte keine Kosten verursachen, daß also $f_i^{rr} = 0$ für alle $r=1, \dots, q$ und $i=1, \dots, k$ gilt. Diese Annahme wird auch für alle folgenden Modelle beibehalten. Daraus folgt, daß für alle i und r $\sigma_i^r = \gamma_i^r$ gilt.

Das Modell 2.3 wurde 1971 von Aleshin und Mednitzki vorgeschlagen. Gegenüber den Modellen, die von Lefebier und aufbauend auf dessen Arbeiten von Takayama und Judge entwickelt worden sind, hat es den Vorzug, daß es in seiner Struktur die räumlichen Beziehungen besser widerspiegelt. Die Produktionsaktivitäten sind von den Transportaktivitäten unabhängig in dem Sinne, daß die Auswahl einer bestimmten Produktionsaktivität noch völlig offen läßt, wohin das so produzierte Gut verschickt wird. In dem von Takayama und Judge vorgeschlagenen Modell hingegen wird mit der Auswahl einer bestimmten Produktionsaktivität auch bereits die Region festgelegt, in der das produzierte Gut verbraucht wird¹⁾. Die Struktur des Modells 2.3 wird in der Abbildung 1 sichtbar. Wie man sofort erkennen kann, bilden die Regionen voneinander unabhängige Produktionskomplex^e, die lediglich über die Lieferbeziehungen miteinander in Verbindung gebracht werden. Das Modell 2.3 stellt ein lineares System dar, das die kostengünstigste Verteilung von gegebenen Produktionsaktivitäten (Industrien) über mehrere Regionen sucht. Die räumliche Verteilung der Endnachfrage sowie der Ressourcen muß bekannt sein. Zwischenprodukte sowie Kuppelproduktion sind zugelassen. Die Produktionskostenunterschiede in den einzelnen Regionen, die unterschiedliche Ausstattung mit Ressourcen, die räumliche Verteilung der Endnachfrage sowie die Transportkosten bestimmen die regionale Struktur der Produktionsaktivitäten. Damit wird gleichzeitig festgelegt, welche Regionen welche Produkte exportieren beziehungsweise importieren und wie die Transportflüsse im Raum verlaufen.

1) S. Takayama und Judge, Spatial and Temporal Price and Allocation Models, a.a.O. S. 89-99; Lefebier, Allocation in Space, a.a.O. S. 101-109; ebenso Stevens, "Inter-regional Linear Programming", a.a.O. S. 66-67.

2.3 Einführung von Konsumfunktionen

Im Modell 2.3 mußte angenommen werden, daß die gegebene räumliche Verteilung der Nachfrage durch die Variation des Beschäftigungsniveaus in den einzelnen Regionen nicht beeinflußt wird¹⁾. Diese Annahme, die in den offenen Input-Output-Modellen und den meisten Programmierungsmodellen gemacht wird, stellt eine Unterbrechung der zugrundeliegenden Kette der gegenseitigen Abhängigkeiten dar. In der Regionaltheorie gibt es keinen Zweifel darüber, daß die Größe der lokalen Märkte ein Faktor ist, der die Konzentration der Produktion im Raum beschleunigt. Von Böventer weist in seiner "Die Struktur der Landschaft"²⁾ darauf hin, daß dieser Faktor gerade in den hochindustrialisierten Ländern und im Zusammenhang mit der hohen Einkommenselastizität der Nachfrage nach Industrieprodukten die Entstehung von industriellen Ballungsräumen fördert.

Soweit Nachfragekonzentration im Raum als eine Ursache für die Konzentration der industriellen Produktion betrachtet wird, ist dieser Zusammenhang im Rahmen unseres Modelles berücksichtigt. Die Beziehung zwischen diesen Größen ist jedoch nicht als ein einfacher Kausalzusammenhang zu beschreiben, sondern eher als eine Wechselbeziehung: Die Konzentration der Nachfrage fördert die Konzentration der Produktion. Dadurch steigt über die Erhöhung der regionalen Einkommen wiederum die regionale Nachfrage³⁾. Dieser Rückkoppelungseffekt trägt dazu bei, die regionale Konzentration zu erhöhen, indem er den

-
- 1) Vgl. Takayama und Judge, Spatial and Temporal Price and Allocation Models, a.a.O.; Lefebvre, Allocation in Space, a.a.O.; Aleshin und Mednitzki, "Algorithm Problems", a.a.O.; Stevens, "Interregional Linear Programming", a.a.O.
 - 2) Von Böventer, E., "Die Struktur der Landschaft. Versuch einer Synthese und Weiterentwicklung der Modelle J.H. von Thünen, W. Christaller und A. Löschs," in: Henn, R., Bombach, G. und von Böventer, E., Optimales Wachstum und Optimale Standortverteilung, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 27 (Berlin, 1962), S. 124 ff.
 - 3) Von Böventer, E., "Spatial Organization Theory as a Basis for Regional Planning," Journal of the American Institute of Planners, 30 (1964), S.95.

gegenläufigen Effekt der höheren Faktorpreise in Ballungsgebieten mehr oder weniger neutralisiert¹⁾.

Unser Problem besteht in der Einbeziehung dieser Wechselbeziehung in das Modell.

Zu diesem Zweck benützen wir eine Methode, die bei der Konstruktion von Input-Output-Modellen²⁾, insbesondere von regionalen Input-Output-Modellen³⁾, verwendet wird. Wir ergänzen das Modell 2.3 durch Konsumfunktionen des Keynesianischen Typs.

Dies erfordert die Definition von zwei neuen fiktiven Aktivitäten sowie die Hinzufügung einer Einkommensgleichung (genauer: Ungleichung) für jede Region. Zunächst wird jede der bestehenden Produktionsaktivitäten um eine Zeile erweitert. Diese Zeile enthält den Wertschöpfungskoeffizienten

$$\begin{array}{l} e_j^r \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad \begin{array}{l} r = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

der betreffenden Aktivität. Er gibt an, wieviel Einkommen pro Niveaeinheit der betreffenden Aktivität x_j^r entsteht. Das heißt, wir setzen voraus, daß erstens der Arbeitsaufwand proportional dem Output ist und zweitens die Löhne konstant sind. Die Summe der Wertschöpfungen durch die einzelnen Aktivitäten in einer Region ergeben das zusätzliche regionale Einkommen y^r , das als eine fiktive Aktivität in das Modell aufgenommen wird.

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \geq 0 \quad r=1, \dots, q \quad (2.5)$$

Diese Ungleichung bringt zum Ausdruck, daß das zusätzliche regionale Einkommen y^r nicht geringer als die Summe

- 1) Von Böventer, E., "City Size Systems: Theoretical Issues, Empirical Regularities and Planning Guides," Urban Studies, 10 (1973), S. 146.
- 2) Schumann, Input-Output-Analyse (Berlin, 1968), S. 68-75.
- 3) Isard, W. und Langford, T.W., Regional Input-Output Study: Recollections, Reflections and Diverse Notes on the Philadelphia Experience (Cambridge, Mass., 1971), S.100-103.

der Wertschöpfungen durch die einzelnen Produktionsaktivitäten sein darf. Die Restriktion 2.5 ist in der optimalen Lösung immer als Gleichung erfüllt. Nun definieren wir für jede Region und für jedes Produkt i ($i=1,..,m$) die marginale Konsumneigung

t_i^r
von der wir annehmen, daß sie konstant ist. Die Größe

$$t_i^r y^r$$

gibt die zusätzliche Nachfrage nach dem Gut i in der Region r an, die durch das Einkommenswachstum y^r in dieser Region hervorgerufen worden ist. Durch Hinzufügen dieser Beziehungen zum Modell 2.3 erhalten wir

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_g^q z_i^{rg} \geq -s_i^r \quad (2.6a)$$

$$-\sum_j v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} \geq d_i^r \quad (2.6b)$$

$i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r \geq b_i^r \quad (2.6c)$$

$i=k+1, \dots, m$

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \geq 0 \quad (2.6d)$$

$x_j^r, y^r, z_i^{hg} \geq 0$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q f_i^{hg} z_i^{hg} \longrightarrow \text{Min}$$

Das zu 2.6 duale Problem lautet:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r - e_j^r \omega^r \leq c_j^r \quad (2.7a)$$

$$-\sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r - \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r + \omega^r \leq 0 \quad (2.7b)$$

$$-\sigma_i^h + v_i^g \leq f_i^{hg} \quad (2.7c)$$

$$j = 1, \dots, n; \quad r, g, h = 1, \dots, q$$

$$v_i^r, \sigma_i^r, \pi_i^r, \omega^r \geq 0$$

$$\sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^k d_i^r v_i^r - \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^k s_i^r \sigma_i^r + \sum_{r=1}^q \sum_{i=k+1}^m b_i^r \pi_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (2.7d)$$

Zur Interpretation von 2.7:

Die Größe ω^r taucht in dem Modell neu auf. Sie ist als Kosten pro Einkommenseinheit in der Region r zu interpretieren. Mit anderen Worten, sie gibt an, um wieviel die Kosten zunehmen, wenn das Einkommen in der r -ten Region um eine Einheit steigt.

Die zusätzlichen Kosten einer Einkommenseinheit hängen von der Menge und den Preisen der Güter ab, die aufgrund dieses Einkommenszuwachses zusätzlich nachgefragt werden.

Dieser Zusammenhang kommt in den q Ungleichungen 2.7b zum Ausdruck. Durch Umformung erhalten wir daraus:

$$\sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r \geq \omega^r$$

Damit die zu dieser dualen Restriktion entsprechende primale (fiktive) Aktivität einen positiven Wert hat, muß diese Restriktion als Gleichung erfüllt sein. Daraus folgt, daß die Grenzkosten des Einkommens immer gleich den Grenzausgaben sind. Wie man sieht, kann man die Beschränkung 2.7b auch als Budgetbeschränkung interpretieren. Die Richtung der Kausalbeziehung ist jedoch umgekehrt. Während bei der Budgetbeschränkung die Höhe des Einkommens die obere Schranke der Konsumausgaben liefert, bestimmt hier die Höhe der Konsumausgaben den Wert der Grenzkosten des Einkommens.

Mit 2.6 haben wir ein lineares Modell erhalten, das keynesianische Konsumfunktionen enthält. Abb.2 zeigt den Verlauf einer solchen Konsumfunktion.

Falls erwünscht, kann man das Modell weiter verfeinern, indem man verschiedene Wertschöpfungsarten (für höhere und niedrigere Einkommensklassen) unterscheidet und für diese unterschiedliche Konsumneigungen annimmt. In diesem Fall müssen in jeder Region eine entsprechend höhere Anzahl von Gleichungen und fiktiven Aktivitäten hinzuge-

fügt werden. Eine positive Sparneigung läßt sich ebenfalls einbauen, indem man die Ersparnisse wie ein Gut behandelt, das nachgefragt wird.

zusätzliche Nachfrage nach Gut i in der Region r

$$\tan \alpha = t_i^r$$

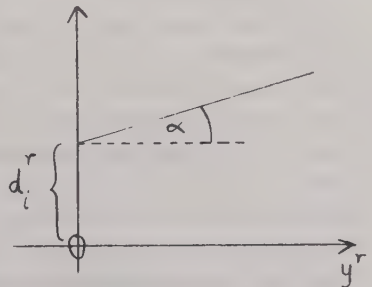


Abbildung 2

Darüber hinaus werden wir in die Lage versetzt, durch Beschränkung der Variablen y^r nach unten, bestimmte Einkommenszuwachsrate für die einzelnen Regionen vorzugeben. Die Festlegung solcher Einkommensziele für die Regionen kann ein wichtiger Aspekt der Regionalplanung sein¹⁾.

2.4 Einführung von Nachfragekurven

2.4.1 Das Problem der Preisinkonsistenz

Das Problem, mit dem wir uns jetzt auseinandersetzen wollen, hat seinen Ursprung darin, daß jeder Allokation in einer gegebenen Wirtschaft ein ganz bestimmtes Preissystem entspricht. Anders ausgedrückt, mit der Festlegung einer bestimmten Faktorallokation in einer Wirtschaft legt man gleichzeitig eine ganz bestimmte Preisstruktur fest. Damit sind die Bestimmungen einer optimalen Faktorallokation und das Finden einer optimalen Preisstruktur lediglich zwei verschiedene Aspekte des gleichen Problems.

Unser Problem haben wir als ein Allokationsproblem formuliert. Wir suchen mit Hilfe eines linearen Modells diejenige Allokation, die eine gegebene Zielfunktion optimiert. Indem wir uns für eine bestimmte (optimale) Allokation entscheiden, entscheiden wir uns gleichzeitig für eine entsprechende Preisstruktur - unabhängig davon, ob uns diese Preisentscheidung bewußt ist oder nicht.

Auf der anderen Seite müssen wir, um ein Modell wie das unsere überhaupt aufstellen zu können, bestimmte Annahmen über die geltende Preisstruktur machen. Dies läßt sich an der Ermittlung der Endnachfragen leicht aufzeigen: Den vorausgesetzten Nachfragemengen müssen immer bestimmte Preisannahmen zugrunde liegen.

1) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, "The Element of Space in Development Planning", a.a.O. S.36.

Auch alle anderen Koeffizienten des Modells, insbesondere die Produktionskoeffizienten sind von der vorausgesetzten Preisstruktur abhängig. Zur Bekräftigung dieser Tatsache sei darauf hingewiesen, daß in jedem Modell schon allein aus Gründen der Datenbeschaffung die benutzten Größen Aggregate sein müssen, die bestimmte Preise als Gewichtungsfaktoren enthalten.

Da wir im allgemeinen nicht annehmen können, daß die Preisstruktur, die unserer optimalen Allokation entspricht, mit der anfangs vorausgesetzten Preisstruktur zusammenfällt, können wir nicht ausschließen, daß die Lösung unseres Modells hinsichtlich ihrer Preisimplikationen den eigenen Voraussetzungen widerspricht. Dies ist das Problem der Preiskonsistenz, das P.A. Cornelisse ausführlich untersucht¹⁾.

Wie Cornelisse nachweist, stellt sich dieses Problem für jegliche Planung, sobald Strukturverschiebungen des Bruttosozialprodukts zur Diskussion stehen. Er zeigt anhand von theoretischen Überlegungen und empirischen Berechnungen, daß Abweichungen dieser Art zwischen den vorausgesetzten und durch den optimalen Plan implizierten Preisen zu erheblichen Verzerrungen führen können.

Planungsmodelle, die auf der Methode der linearen Programmierung basieren, haben den Vorzug, daß sie die Preisimplikationen des optimalen Plans in Form von dualen Variablen und der dualen optimalen Lösung explizit machen²⁾. Wir werden somit in die Lage versetzt nachzuprüfen, ob die Preiskonsistenz gewährleistet ist.

1) Cornelisse, P.A., Price Consistency in Development Planning (Rotterdam, 1973), insbesondere S. 1-5 und 41 ff.

2) S. Dantzig, Lineare Programmierung, a.a.O. Kapitel 12.

3) Dorfman, R., Samuelson, P.A. und Solow, R., Linear Programming and Economic Analysis (New York, 1956), Kapitel 7.

Es sind bis jetzt im wesentlichen zwei Methoden vorgeschlagen worden, um das Problem der Preiskonsistenz in den Griff zu bekommen. Die erste Methode ist die der rekursiven Programmierung. Dies ist eine iterative Methode, die die Rolle der Preise bei der Bestimmung der Nachfrage- und Angebotsmengen explizit berücksichtigt. Das eigentliche Programmierungsmodell wird durch Verhaltensfunktionen (i.e. Nachfrage- und Angebotsfunktionen) ergänzt. Diese Verhaltensfunktionen liefern aufgrund der Werte der dualen Lösung des Programmierungsproblems neue Nachfrage- und Angebotsmengen, die damit ein neues Programmierungsproblem definieren. Im Rahmen eines dynamischen Anpassungsprozesses, der im Grunde eine Verallgemeinerung des Cobweb-Problems darstellt¹⁾, wird ein Gleichgewichtspunkt angestrebt, der zugleich die optimale Lösung bildet²⁾.

Die zweite Methode geht auf Takayama und Judge³⁾ zurück und besteht in dem expliziten Einbau von linearen Nachfrage- und Angebotsfunktionen in das Modell. Das ergibt ein lineares Modell mit einer quadratischen Zielfunktion, das mit den bekannten Algorithmen für quadratische Programmierungsprobleme gelöst wird.

Wie man sieht, zielen beide Methoden darauf, insbesondere den Einfluß der Preisinkonsistenz einzudämmen, der über die Koeffizienten der Endnachfrage beziehungsweise des Angebots wirksam wird. Dadurch wird das Modell preiselastischer. Die Preisschwankungen vermindern sich generell, so daß auch die Preisinkonsistenz reduziert wird, die von anderen Koeffizienten des Modells ausgeht.

1) Day, R.H., "Recursive Programming Models: A Brief Introduction," in: Studies in Economic Planning Over Space and Time, Hrsg. G.G. Judge und T. Takayama (Amsterdam, 1973), S. 329-344.

2) Vgl. Cornelisse, Price Consistency, a.a.O. S. 55 ff.

3) Takayama und Judge, "Spatially Separated Markets", a.a.O.

Wir wollen im folgenden eine dritte Alternative entwickeln, die die explizite Berücksichtigung von Nachfrage und/oder Angebotsfunktionen im Rahmen eines rein linearen Modells ermöglicht. Damit können eine größere Klasse von Angebots- und Nachfragefunktionen behandelt werden, da lediglich verlangt wird, daß sie monoton steigend bzw. fallend sind (das heißt, die Forderung der Linearität wie bei Takayama und Judge entfällt). Das Verfahren beruht auf einer Approximierung der Nachfrage - und Angebotskurven durch Treppenfunktion.

2.42 Lineare Formulierung des Cournot-Enke-Problems

Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir das Verfahren zunächst unabhängig von dem Modell 2.6 beschreiben. Als Ausgangspunkt wählen wir das klassische Transportproblem mit gegebenen Angebots- und Nachfragemengen, das heißt, mit Angebots- und Nachfrageelastizitäten von Null. Wir zeigen dann, wie dieses Problem mit nur linearen Mitteln in ein Cournot-Enke Problem umgeformt werden kann.

d_j mit $j=1,..,n$ seien die Mengen eines Gutes, die in den Orten j nachgefragt werden. s_i mit $i=1,..,m$ seien die Mengen eines Gutes, die in den Orten i angeboten werden. Die Transportkosten für den Transport zwischen den Punkten i und j seien durch f_{ij} gegeben. Es gelte außerdem

$$\sum_j^n d_j \leq \sum_i^m s_i$$

so daß die Aufgabe auf jeden Fall lösbar ist.

Diese Transportaufgabe ist durch völlig unelastische Angebots- und Nachfragekurven charakterisiert, die in der Abbildung 3 dargestellt sind.

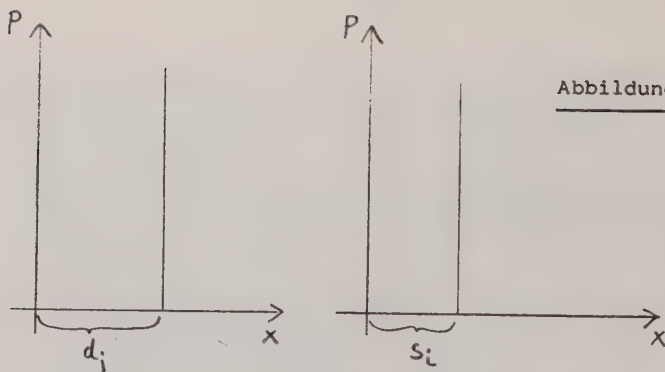


Abbildung 3

Nun zeigen wir, wie man durch Einführung von fiktiven Angebotspunkten treppenförmige Angebots- beziehungsweise Nachfragefunktionen erhalten kann. Unser Vorgehen beruht auf einer bekannten Eigenschaft des Transportproblems. Nehmen wir an, die optimale Lösung des obigen Transportproblems sei bekannt. Nun stellen wir uns vor, daß ein zusätzlicher fiktiver Angebotspunkt mit der Angebotsmenge

$$s^1_j$$

hinzugefügt wird. Wenn die fiktiven Transportkosten von diesem Angebotspunkt zu einem der Nachfragepunkte j geringer sind als der optimale Preis in diesem Nachfragepunkt, so wird es einen fiktiven Güterfluß zwischen dem neuen (fiktiven) Angebotspunkt und dem betreffenden Nachfragepunkt geben. Damit wird im Punkt j nicht mehr die volle Menge d_j von den Angebotspunkten nachgefragt, da ein Teil dieser Nachfrage in Höhe des fiktiven Einflusses bereits befriedigt ist. Wenn dagegen der optimale Preis im Nachfragepunkt j geringer ist als die fiktiven Transportkosten, bleibt alles beim alten. Der Nachfragepunkt j sei mit einem fiktiven Angebotspunkt verbunden. Wie man sieht, wird die Nachfragefunktion in j durch die Einführung des

fiktiven Angebots in eine Treppenfunktion umgewandelt. Abbildung 4 verdeutlicht diesen Umstand. Dabei seien die fiktiven Transportkosten durch f^{1j} gegeben.

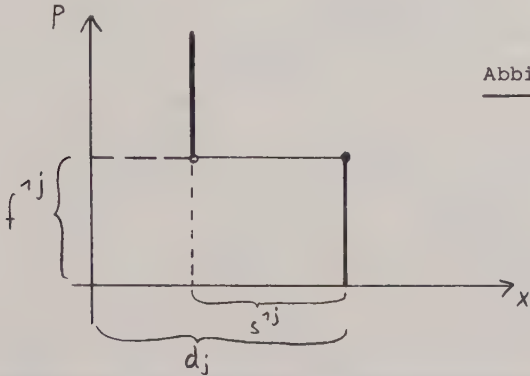


Abbildung 4

Selbstverständlich können wir durch Hinzufügung weiterer fiktiver Angebotspunkte eine feinere Abstufung unserer Nachfragekurve in j erreichen. Die weiteren fiktiven Angebotspunkte seien $2j, 3j$ mit den Angebotsmengen s^{2j}, s^{3j} und f^{2j}, f^{3j} den Transportkosten. Dabei gelte

$$f^{1j} < f^{2j} < f^{3j} \quad \text{und} \quad \sum_{d=1}^3 s^{dj} \leq d_j$$

Abbildung 5 zeigt die so erreichte Form der Nachfragefunktion in j . In Abbildung 6 ist die durch Einführung von fiktiven Angebotspunkten erweiterte Transportaufgabe zu sehen.

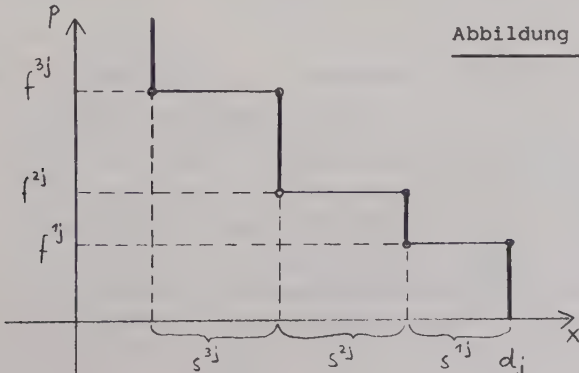


Abbildung 5

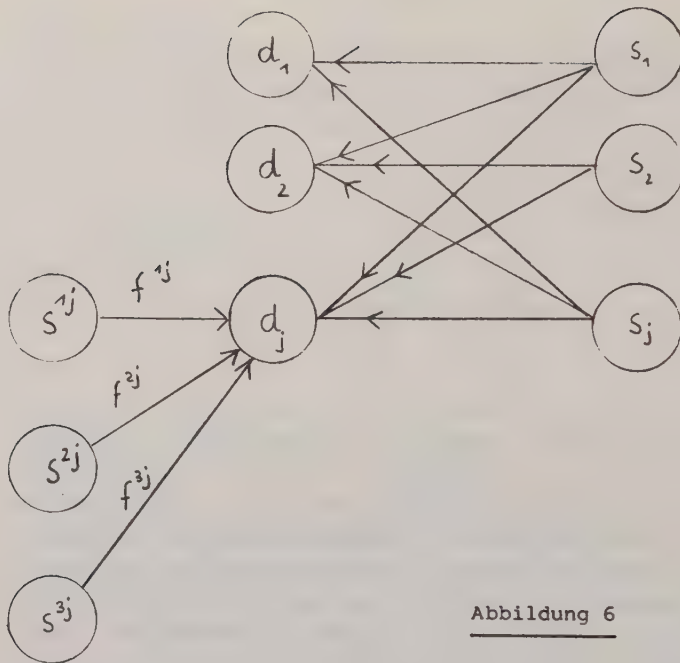


Abbildung 6

Man erkennt, daß die fiktiven Angebotspunkte $1j$, $2j$ und $3j$ nur mit dem Nachfragepunkt j verbunden sind. Andere Nachfragepunkte können sie nicht beliefern, gleichgültig wie hoch die Preise dort sind. Dagegen ist in j die Situation anders: sobald hier der Preis höher als f^{1j} ist, wird nach außen hin nicht mehr die Nachfragemenge d_j auftreten, sondern nur noch die Nachfragemenge $(d_j - s^{1j})$. Wenn der lokale Preis auch f^{2j} übersteigt, wird die Nachfragemenge nochmals reduziert und sinkt auf $(d_j - s^{1j} - s^{2j})$ usw.

Analog lassen sich treppenförmige Angebotsfunktionen konstruieren. In diesem Fall betrachten wir zunächst einen Angebotspunkt i mit der Angebotsmenge s_i . Sobald

der Preis in i höher als f^{1i} wird, erhöht der Zufluß vom fiktiven Angebotspunkt li das Angebot in i um s_{1i} , das heißt, es wird nunmehr $(s_i + s_{1i})$ angeboten. Wenn der Preis höher als f^{2i} wird, erhöht sich das Angebot in i auf $(s_i + s_{1i} + s_{2i})$. Die Form der entsprechenden Angebotskurve und die Lage der fiktiven Angebotspunkte zeigen die Abbildungen 7 und 8.

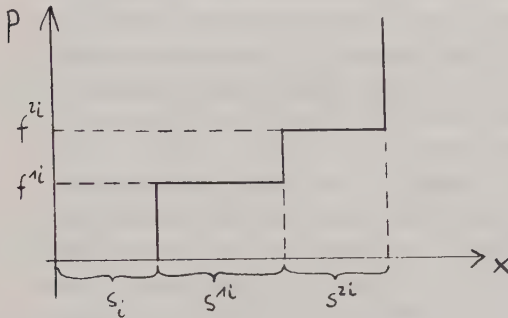


Abbildung 7

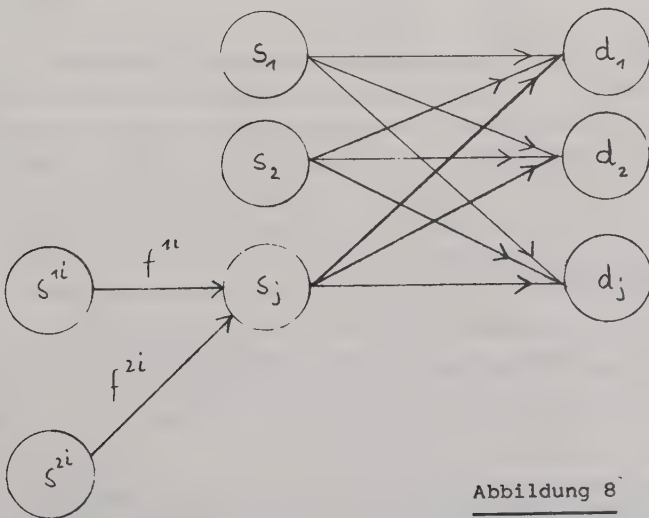


Abbildung 8

Mit Hilfe dieser Methode läßt sich jedes Transportproblem in ein Modell mit treppenförmigen Nachfrage- und Angebotsfunktionen verwandeln. Dabei bleiben die charakteristischen Eigenschaften des klassischen Transportproblems, insbesondere die Linearität und die Triangularität gewahrt, so daß das neue Problem einfach zu lösen ist¹⁾. Im Unterschied zum Modell von Takayama und Judge können wir auch nichtlineare Angebots- und Nachfragekurven durch entsprechende Treppenfunktionen approximieren. Wir sind jedoch nicht in der Lage, bei gleichzeitiger Untersuchung von Märkten für mehrere Güter Kreuzpreiselastizitäten einzubauen (was im Modell von Takayama und Judge möglich ist). Die Tatsache, daß die Marktfunktionen nur näherungsweise berücksichtigt werden können, dürfte in der Praxis keinen wesentlichen Nachteil darstellen, da die empirisch ermittelten Marktfunktionen sowieso nur näherungsweise gelten.

Die Zahl der fiktiven Angebotspunkte ließen sich beschränken, wenn zunächst mit einer groben Annäherung gearbeitet wird und nach der Feststellung der Gleichgewichtslösung lediglich in dessen Umgebung eine feinere Abstufung vorgenommen wird.

2.43 Das erweiterte Modell

Nun erweitern wir das Modell 2.6 durch Hinzufügen der fiktiven Angebotspunkte s_i^{dr} und der fiktiven Transportaktivitäten z_i^{dr} mit den entsprechenden Kostenkoeffizienten f_i^{dr} , wobei $i=1,\dots,k$; $r=1,\dots,q$; und $d=1,\dots,u^r$; laufen.

1) Diese Methode kann auch als eine primale Interpretation und Verallgemeinerung der von Cornélisse vorgeschlagenen Vorgehensweise aufgefaßt werden, die auf Beschränkung der dualen Variablen beruht (Vgl. Cornélisse, Price Consistency, a.a.O. S. 51).

Gleichzeitig wollen wir das Modell, das bislang eine geschlossene Wirtschaft ohne Außenhandelsbeziehungen charakterisierte, öffnen, indem wir Export- und Importaktivitäten zulassen.

Diese Aktivitäten werden mit z_i^{rE} (Export des Gutes i aus der Region r) und z_i^{rI} (Import des Gutes i in die Region r) bezeichnet. Die Koeffizienten f_i^{rE} bzw. f_i^{rI} stellen die entsprechenden Außenhandelspreise dar (fob Preise für Exporte und cif Preise für Importe). Diese Koeffizienten werden in die Zielfunktion aufgenommen, wobei die Exportpreise ein negatives Vorzeichen erhalten.

Die Aufnahme der Importpreise in die zu minimierende Zielfunktion bedeutet nicht, daß dieses Modell die Importe minimiert. Vielmehr werden die Importaktivitäten genau dann in der optimalen Lösung enthalten sein, wenn die Produktion eines Gutes im Inland teurer ist als dessen Importpreis. Dabei werden sowohl direkte wie auch indirekte Kosten berücksichtigt. Genauso wird ein Gut nur dann exportiert, wenn dessen direkte und indirekte Produktionskosten im Inland niedriger sind als dessen Exportpreis. Außerdem ist es auch möglich, daß ein Gut gleichzeitig exportiert und importiert wird, da wir für jede Region eine getrennte Export- und Importaktivität definiert haben. Dieser Fall kann dann eintreten, wenn die unterschiedliche geographische Lage der Regionen zu unterschiedlichen Außenhandelssituationen führt (Grenzhandel).

Durch diese Modifikationen erhalten wir das Modell 2.8:

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_h^q z_i^{hr} - z_i^{Ir} - z_i^{Er} \gg -s_i^r \quad (2.8a)$$

$$-\sum_j^n u_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + z_i^{Ir} + \sum_{d=1}^u z_i^{dr} \gg d_i^r \quad (2.8b)$$

$$-z_i^{dr} \gg -s_i^{dr} \quad (2.8c)$$

$$i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r \gg b_i^r \quad (2.8d)$$

$$i=k+1, \dots, m$$

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \gg 0 \quad (2.8e)$$

$$x_j^r, y^r, z_i^{hr}, z_i^{Ir}, z_i^{Er}, z_i^{dr} \gg 0$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q f_i^{hg} z_i^{hg} + \sum_r^q \sum_i^k \sum_d^u f_i^{dr} z_i^{dr} \quad (2.8f)$$

$$+ \sum_r^q \sum_i^k f_i^{Ir} z_i^{Ir} - \sum_r^q \sum_i^k f_i^{rE} z_i^{rE} \rightarrow \text{Min}$$

Das zu 2.8 duale Problem lautet:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k q_{ij}^r r_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r - e_j^r \omega^r \leq c_j^r \quad (2.9a)$$

$$j=1, \dots, n; \quad r=1, \dots, q$$

$$-\sum_{i=1}^k t_i^r r_i^r - \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r + \omega^r \leq 0 \quad (2.9b)$$

$$j=1, \dots, n; \quad r=1, \dots, q$$

$$-\sigma_i^{h_g} + r_i^{h_g} \leq f_i^{h_g} \quad (2.9c)$$

$$h, g=1, \dots, q; \quad i=1, \dots, k$$

$$\sigma_i^r \geq f_i^{rE} \quad (2.9d)$$

$$r_i^r \leq f_i^{rI} \quad (2.9e)$$

$$r_i^r - p_i^{dr} \leq f_i^{dr} \quad (2.9f)$$

$$r=1, \dots, q; \quad d=1, \dots, n_j^r; \quad i=1, \dots, k$$

$$\sigma_i^r, r_i^r, \pi_i^r, \omega^r, p_i^{dr} \geq 0$$

$$-\sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^k s_i^r \sigma_i^r + \sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^k d_i^r r_i^r + \sum_{r=1}^q \sum_{i=k+1}^m b_i^r \pi_i^r$$

$$-\sum_{r=1}^q \sum_{i=1}^k \sum_{d=1}^{u^r} s_i^{dr} p_i^{dr} \rightarrow \text{Max} \quad (2.9g)$$

Wir fassen die Annahmen, die dem Modell 2.8 zugrunde liegen, zusammen:

I. Annahmen über die Produktionsseite:

- a) Die Produktionsfunktion ist für jede Region linear und in Form von Produktionskoeffizienten p_{ij}^r , v_{ij}^r , a_{ij}^r , den Wertschöpfungskoeffizienten e_j^r und den Kostenkoeffizienten c_j^r gegeben.
- b) Die Produktionsaktivitäten beeinflussen einander nur über die Preise der gemeinsamen Inputs. Andere externe Effekte sind ausgeschlossen.

II. Annahmen über die Nachfrageseite:

- a) In den einzelnen Regionen sind die Nachfragefunktionen für alle Güter bekannt. Alle Kreuzpreiselastizitäten sind gleich Null.
- b) Die marginale Konsumneigung ist für alle Güter und alle Regionen bekannt und konstant.

III. Annahmen über die Transportindustrie:

- a) Die durchschnittlichen Transportkosten f_i^{gh} sind für jedes Gut und jede Strecke konstant. Dagegen können mit der Länge der Transportstrecke abnehmende Durchschnittskosten berücksichtigt werden.
- b) Die Transportaktivitäten verbrauchen keines der Güter und Ressourcen $i=1, \dots, m$, sodaß die Transportkosten von den Preisen dieser Güter unabhängig sind.

Unter diesen Voraussetzungen beantwortet das Modell 2.8 folgende Fragen:

Welches Gut wird wo produziert?

Welche Produktionsaktivitäten werden in den einzelnen Regionen benützt?

Wie groß ist das zusätzliche Einkommen in jeder Region?

Wie groß ist die Endnachfrage nach jedem Gut in den einzelnen Regionen?

Welche Güter werden von den einzelnen Regionen exportiert, beziehungsweise importiert?

Wie hoch ist der nationale Import beziehungsweise Export an einzelnen Gütern?

Wie hoch sind die regionalen Preise der einzelnen Güter?

Wie hoch sind die Renten für die immobilien Ressourcen der Regionen?

Um welchen Faktor müssen die Einkommen in den einzelnen Regionen angepaßt werden, damit die Budgetgleichung der Haushalte eingehalten werden kann?

Wie verlaufen die Handelsströme zwischen den Regionen?

Bei der Beantwortung der obigen Fragen berücksichtigt das Modell folgende Faktoren:

Der unterschiedliche Inputbedarf, der unterschiedliche Outputstruktur sowie die unterschiedlichen Durchschnittskosten der einzelnen Aktivitäten in den verschiedenen Regionen.

Die Höhe der durchschnittlichen Transportkosten auf den einzelnen Strecken.

Die Verteilung der Ressourcen (im weitesten Sinne des Wortes) im Raum.

Die Erhöhung der Inputpreise in den Regionen, in denen sich die Produktionsaktivitäten konzentrieren.

Die Vorteile der räumlichen Nähe zu den vor- und nachgelagerten Produktionsstufen.

Die Erhöhung der regionalen Einkommen durch Agglomeration und die dadurch bewirkte Nachfrageerhöhung für Einkommenselastische Güter.

Die Verteilung der Nachfrage im Raum, oder genauer, der unterschiedliche Verlauf der Nachfragefunktionen für einzelne Güter in den verschiedenen Regionen.

Dagegen können folgende Faktoren von dem Modell nicht berücksichtigt werden:

Positive interne Ersparnisse.

Agglomerationsvorteile (mit Ausnahme der durch Agglomeration bedingten Nachfrageerhöhung).

Kreislaufzusammenhänge und monetäre Faktoren.

Faktorbewegungen.

Um die Beurteilung des Modells 2.8 zu erleichtern, geben wir noch die Optimalitätsbedingungen an und interpretieren diese kurz:

$$\left(\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_g^q z_i^{rg} - z_i^{rE} + s_i^r \right) \sigma_i^r = 0 \quad (2.10a)$$

$$r = 1, \dots, q; \quad i = 1, \dots, k$$

$$\left(-\sum_j^n v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + z_i^{Ir} + \sum_d^u z_i^{dr} - d_i^r \right) v_i^r = 0 \quad (2.10b)$$

$$\left(s_i^{dr} - z_i^{dr} \right) p_i^{dr} = 0 \quad (2.10c)$$

$$\left(\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r - b_i^r \right) \pi_i^r = 0 \quad (2.10d)$$

$$\left(y^r - \sum_j^n e_j^r x_j^r \right) \omega^r = 0 \quad (2.10e)$$

$$\left(-\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r + \sum_i^k v_{ij}^r v_i^r - \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r + e_j^r \omega^r + c_j^r \right) x_j^r = 0 \quad (2.10f)$$

$$\left(\sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r - \omega^r \right) y^r = 0 \quad (2.10g)$$

$$(f_i^{hg} + \sigma_i^h - \gamma_i^g) z_i^{hg} = 0 \quad (2.10h)$$

$$(\sigma_i^r - f_i^{rE}) z_i^{rE} = 0 \quad (2.10i)$$

$$(f_i^{Ir} - \gamma_i^r) z_i^{Ir} = 0 \quad (2.10k)$$

$$(f_i^{dr} + \rho_i^{dr} - \gamma_i^r) z_i^{dr} = 0 \quad (2.10l)$$

Diese Bedingungen ergeben gemeinsam mit den Restriktionen, die in den primalen und dualen Problemen 2.8 und 2.9 formuliert worden sind, die Optimalitätsbedingungen.

Die Bedingungen 2.10a - 2.10e fordern, daß die Preise $Q_i^r, \gamma_i^r, \rho_i^r, \pi_i^r$ und ω^r nur dann positiv sein können, wenn die entsprechenden Restriktionen des primalen Problems als Gleichung erfüllt sind. Anders ausgedrückt, immer wenn in einer Region von einem Gut ein Überschuß vorhanden ist, wird dessen Preis gleich Null sein. Die Bedingung 2.10 f impliziert, daß eine Produktionsaktivität nur dann betrieben wird, wenn keine Verluste gemacht werden, das heißt, wenn die dadurch erzielten Erlöse gleich der Summe der Ausgaben für die Vorprodukte, der Lohnsumme, den Rentenzahlungen an die immobilien Ressourcen und den direkten Kosten sind.

Die Bedingung 2.10g kann man als eine Budgetbeschränkung auffassen. Sie besagt, daß in jeder Region die Kosten einer zusätzlichen Einkommenseinheit, ω^r , gleich der Summe der Ausgaben sein muß, die infolge dieser Einkommenssteigerung getätigt werden. Das kann man sehen, wenn man bedenkt, daß y^r in jeder Region mit positiver Produktion auch einen

positiven Wert haben wird und daß daher der Klammerausdruck in 2.10g gleich Null sein muß.

Die Bedingung 2.10h impliziert, daß die Preisunterschiede zwischen zwei Regionen, zwischen denen Transportflüsse mit positivem Wert existieren, gleich den durchschnittlichen Transportkosten sein müssen.

Die Bedingungen 2.10i und 2.10k fordern, daß der Preis eines Gutes in einer Region nie kleiner als dessen Exportpreis und größer als dessen Importpreis sein darf. Immer wenn Exporte beziehungsweise Importe tatsächlich stattfinden, wird der regionale Preis des betreffenden Gutes gleich dem Export- beziehungsweise dem Importpreis sein müssen.

Die Bedingung 2.10l besagt, daß der Marktpreis eines jeden Gutes gleich dem Preis sein muß, den die Nachfrager für die gegebene Menge zu bezahlen bereit sind. Das kann man wie folgt sehen:

Für diejenigen fiktiven Aktivitäten ($d=1, \dots, d^*$), die in der optimalen Lösung einen positiven Wert haben, muß der entsprechende Klammerausdruck gleich Null sein; es gilt

$$V_i^r = f_i^{dr} + g_i^r \quad \begin{matrix} r = 1, \dots, q \\ d = 1, \dots, d^* \end{matrix} \quad ; \quad i = 1, \dots, k$$

Das bedeutet, daß die in r tatsächlich nachgefragte Menge des Gutes i

$$d_i^r - (s_i^{1r} + s_i^{2r} + \dots + s_i^{d^{*r}})$$

beträgt. V_i^r ist durch die Lösung des Rests des Modells gegeben. Da für f_i^{dr}

$$f_i^{d^{*r}} > f_i^{d^{*-1,r}} > \dots > f_i^{2r} > f_i^{1r}$$

gilt, gilt für g_i^{dr}

$$g_i^{1r} > g_i^{2r} > \dots > g_i^{d^{*r}}$$

Die Variablen y_i^{dr} haben in der Zielfunktion des dualen Problems einen negativen Koeffizienten, daher werden sie in der optimalen Lösung so klein wie möglich werden. Der kleinste von ihnen $y_i^{d^*r}$, wird gleich Null sein. Daraus folgt, daß

$$y_i^r = f_i^{d^*r}$$

gilt, wobei $f_i^{d^*r}$ der Preis ist, den die Nachfrager für die tatsächlich bezogene Menge zu bezahlen bereit sind.

3. L Ö S U N G S A L G O R I T H M E N

Nach dem das Modell formuliert worden ist, wollen wir untersuchen, ob wir dessen spezifische Struktur benutzen können, um einen wenig aufwendigen Algorithmus zu finden. Darüber hinaus interessiert uns die Frage, inwieweit ein so gefundener Algorithmus als ein dezentraler Entscheidungsmechanismus interpretiert werden kann.

Die gleiche Frage wird in der Arbeit von Aleshin und Mednitzki¹⁾ untersucht. Die Autoren schlagen einen Algorithmus vor, der noch verbesserungsfähig ist. Auch Mennes u.a.²⁾ beschäftigen sich mit diesem Problem und machen einen Vorschlag. Es wird unten nachgewiesen, daß der letztere auf fehlerhaften Voraussetzungen beruht.

Den genannten Ansätzen ist es gemeinsam, daß sie von einer Zweiteilung des Modells ausgehen. Die Struktur des Modells, oder wenn man so will, des Problems selbst, legt eine Zweiteilung nahe. Das Modell enthält einmal einen Bereich, der alle Produktionsaktivitäten enthält und einen zweiten, in dem die Transportaktivitäten untergebracht worden sind. Der gemeinsame Grundgedanke besteht in der abwechselnden Optimierung dieser beiden Hauptbereiche des Modells, wobei jeweils die Werte der Variablen des anderen Bereiches als gegeben betrachtet werden.

3.1 Algorithmus von Mennes, Tinbergen und Waardenburg

Die Autoren entwickeln ihren Algorithmus für ein einfaches Modell, dessen Produktionsbereich lediglich Input-Output Beziehungen berücksichtigt. Da er sich ohne

1) Aleshin und Mednitzki, "Algorithm Problems", a.a.O.

2) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O. S.117-145; S. 288-295.

Änderung auch auf ein Modell von der Art des unseren anwenden läßt, wollen wir diesen Algorithmus nicht an Hand des einfachen Modells von Mennes u.a. sondern an Hand des Modells 2.3 (oben) schildern, um Vergleiche zu erleichtern. Als erstes sei das Modell 2.3 noch einmal wiedergegeben:

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_g^q z_i^{rg} \geq -s_i^r \quad (3.1a)$$

$$-\sum_j^n u_{ij}^r x_j^r + \sum_n^q z_i^{hr} \geq d_i^r \quad (3.1b)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad (3.1c)$$

$$x_j^r, z_i^{hg} \geq 0 \quad i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_i^k \sum_g^q \sum_n^q f_i^{gh} z_i^{gh} \rightarrow \text{Min} \quad (3.1d)$$

Das dazu duale Problem lautet:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r r_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r \leq c_j^r \quad (3.2a)$$

$$j = 1, \dots, n ; r = 1, \dots, q$$

$$-\sigma_i^h + r_i^g \leq f_i^{hg} \quad (3.2b)$$

$$i = 1, \dots, k ; h, g = 1, \dots, q$$

$$\sigma_i^r, r_i^r, \pi_i^r \geq 0$$

$$-\sum_r^q \sum_i^k s_i^r \sigma_i^r + \sum_r^q \sum_i^k d_i^r r_i^r + \sum_r^q \sum_{i=k+1}^m b_i^r \pi_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (3.2c)$$

Nach dem Verfahren von Mennes u.a. entscheidet man zuerst, wie die verschiedenen Produktionsaktivitäten über die einzelnen Regionen verteilt werden sollen, damit die Produktionskosten minimiert werden. Dabei werden die Transportkosten zunächst nicht berücksichtigt. Wir erhalten diese Aufgabe aus unserem ursprünglichen Modell, indem wir die Transportkostenkoeffizienten $f_i^{gh}=0$ setzen, die entsprechenden Ungleichungen in 3.1a und 3.1b (d.h. diejenigen Ungleichungen, die den gleichen Index i haben, somit das gleiche mobile Gut i betreffen) addieren und danach das Ganze über r summieren. Das Ergebnis dieser Operation liefert ein Problem, das mit dem Problem 2.1 identisch ist:

$$\sum_r^q \sum_j^n (p_{ij}^r - v_{ij}^r) x_j^r \geq \sum_r^q (d_i^r - s_i^r) \quad (3.3a)$$

$$i = 1, \dots, k$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_{ir} \quad (3.3b)$$

$$i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r \rightarrow \text{Min} \quad x_j^r \geq 0 \quad (3.3c)$$

Wie man sieht, werden die Transportvariablen im Laufe der Addition eliminiert, da sie in jeder Spalte nur zweimal vorkommen, wobei sie einmal 1 und einmal -1 als

Koeffizienten haben. Die Identität mit 2.1 wird sofort einsichtig, wenn man bedenkt, daß definitionsgemäß

$$p_{ij}^r - v_{ij}^r = a_{ij}^r \quad \text{und} \quad d_i^r - s_i^r = b_i^r \quad i=1, \dots, k; r=1, \dots, q$$

gilt. Wenn dieses Problem, das wir kurz "Produktionsaufgabe" nennen, gelöst, d.h. eine Verteilung x_j^r ($r = 1, \dots, q; j=1, \dots, n$) der Aktivitäten über die verschiedenen Regionen gefunden worden ist, die die Produktionskosten insgesamt minimiert, ist auch die Überschußnachfrage jeder Region bezüglich jedes mobilen Gutes $i = 1, \dots, k$ festgelegt. Diese regionale Überschußnachfrage, die auch negativ sein kann und in diesem Fall ein Angebot darstellt, setzt sich aus vier Komponenten zusammen:

Regionale Überschußnachfrage = regionale Endnachfrage¹⁾
 - regionale Lagerbestände
 + regionale Zwischennachfrage - regionalen Produktion

Von diesen vier Komponenten sind die beiden ersten gegebene Konstante. Die beiden anderen hängen von der Höhe und der Art der für diese Region gewählten Aktivitäten ab. In den Symbolen unseres Modells minimieren die x_j^r den Ausdruck 3.3 c und bestimmen gleichzeitig die regionalen Überschußnachfrage nach jedem mobilen Gut als

$$\left\{ (d_i^r - s_i^r) - \sum_j^n (p_{ij}^r - v_{ij}^r) x_j^r \right\} \quad (3.4)$$

$$i = 1, \dots, k; r = 1, \dots, q$$

¹⁾ Zur Vereinfachung der Darstellung diskutieren wir die Lösungsverfahren an Hand des Modells mit konstanter Endnachfrage. Die Erweiterung auf Modelle mit positiver Nachfrageelastizität erfolgt später.

Wie bereits hingewiesen, stellen diese Größen eine Überschußnachfrage dar, wenn sie positiv sind und ein Überschußangebot, wenn sie negativ sind.

Mit der Festlegung der Überschußnachfrage ist der zweite Bereich des Modells, den wir "Transportaufgabe" nennen, definiert. Diese Transportaufgabe besteht in der Bestimmung der mit Rücksicht auf Transportkosten optimalen Lieferbeziehungen zwischen den Überschußregionen und den Defizitregionen. Dabei müssen die Lieferbeziehungen für jedes Gut einzeln festgelegt werden. Mit anderen Worten, es sollen für jedes Gut diejenigen Transportflüsse gefunden werden, die zu den geringsten Transportkosten führen. Die so entstehenden k-Transportaufgaben sind immer lösbar, da die Summe der Überschußnachfrage immer gleich der Summe des Überschußangebotes ist. Sie lassen sich mit den bisher vereinbarten Symbolen als

$$-\sum_g z_i^{rg} \geq -s_i^r - \sum_j p_{ij}^r x_j^r \quad (3.5a)$$

$$\sum_h z_i^{hr} \geq d_i^r + \sum_j u_{ij}^r x_j^r \quad (3.5b)$$

$$z_i^{gh} \geq 0 \quad i=1, \dots, k; r, g, h=1, \dots, q$$

$$\sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q f_i^{hg} z_i^{hg} \rightarrow \text{Min} \quad (3.5c)$$

schreiben. Wie man sieht, setzt sich das Problem 3.5 aus k unabhängigen Transportproblemen zusammen. Daher können wir 3.5 auch in die Form bringen, wie sie bei 3.6 zu sehen ist. Aufgrund dieser Eigenart ist es besonders einfach, die Transportaufgabe zu lösen, wenn die Werte der Produktionsaktivitäten bekannt sind.

$$i=1, \dots, k \left\{ \begin{array}{l} -\sum_g^q z_i^{rg} \geq -s_i^r - \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{or} \quad (3.6a) \\ \sum_h^q z_i^{hr} \geq d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^r x_j^{or} \quad (3.6b) \\ z_i^{hg} \geq 0 \quad r, g, h = 1, \dots, q \\ \sum_g^q \sum_h^q f_i^{hg} z_i^{hg} \rightarrow \text{Min} \quad (3.6c) \end{array} \right.$$

Dazu entsprechen die folgenden k dualen Probleme:

$$i=1, \dots, k \left\{ \begin{array}{l} \delta_i^g - \mu_i^h \leq f_i^{hg} \quad (3.7a) \\ \delta_i^g, \mu_i^h \geq 0 \quad h, g = 1, \dots, q \\ -\sum_r^q (s_i^r + \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{or}) \mu_i^r + \sum_r^q (d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^r x_j^{or}) \delta_i^r \\ \rightarrow \text{Max} \quad (3.7b) \end{array} \right.$$

Diese Methode der Lösung in zwei Schritten führt nur dann zu einem Optimum, wenn angenommen werden kann, daß die Transportkosten die Standortwahl der Industrie nicht beeinflussen¹⁾.

1) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O. S. 108.

Eine solche Annahme wäre berechtigt, wenn die Transportkosten relativ zu den regionalen Produktionskostendifferenzen erheblich kleiner sind. In diesem Fall würden allein die Unterschiede in den Produktionskosten die räumliche Verteilung der Produktionsaktivitäten bestimmen. Das Modell würde die Produktion in den kostengünstigsten Regionen zentralisieren. Nur wenn die Ressourcenausstattung dieser Regionen nicht ausreicht, würden auch in den weniger produktiven Regionen positive Mengen produziert werden.

Wenn dagegen angenommen werden muß, daß die Transportkosten relativ zu den regionalen Produktionskostendifferenzen hoch sind, wäre auch deren Einfluß auf die Standortwahl der Industrien entsprechend größer. Im Extremfall würde die Kostenminimierung zu einer Autarkielösung führen, d.h. zu einer Lösung, bei der die regionale Nachfrage ausschließlich durch die Produktion an Ort und Stelle befriedigt wird, so daß überhaupt keine Transportkosten auftreten. Dieser Fall der vollständigen Dezentralisierung kann selbstverständlich nur auftreten, sofern die ressourcenmäßige Ausstattung der einzelnen Regionen dies überhaupt erlaubt¹⁾.

Da im Allgemeinen die Gültigkeit der ersten Annahme nicht gewährleistet werden kann, müßte ein Verfahren entwickelt werden, der auch den Einfluß der Transportkosten auf die räumliche Verteilung der Produktionsaktivitäten in Rechnung stellt. Ein Weg hierzu wäre die simultane Lösung des Modells. Wir erhielten dann die optimale Lösung, bei der die Gesamtkosten relativ zum Ergebnis beim Vorgehen in zwei Schritten, reduziert

1) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O. S.80 und 111. Diese Überlegungen gelten nur in bezug auf das obige Modell, wo konstante Skalenerträge für alle Aktivitäten vorausgesetzt werden. Vgl. von Böventer, Theorie des Räumlichen Gleichgewichts, a.a.O. S. 15

würden. Diese mögliche Reduktion der Gesamtkosten würde durch eine Abnahme der Transportkosten, die durch die gleichzeitige Zunahme der Produktionskosten nicht voll ausgeglichen wird, verursacht. Die simultane Lösung würde uns jedoch sehr bald in Konflikt mit der verfügbaren Rechenkapazität bringen, besonders, wenn wir mit einigermaßen detaillierten Modellen arbeiten wollen. Mennes u.a. schlagen daher ein iteratives Verfahren vor, bei dem durch abwechselnde Lösung der zwei Bereiche in mehreren Runden eine optimale Lösung gefunden werden soll.

Das Iterationsverfahren von Mennes u.a. beruht auf drei wichtigen Eigenschaften des Modells 3.1:

1. Jede Zuordnung von Werten zu den Variablen des Produktionsbereiches definiert genau k voneinander unabhängige Transportaufgaben, in dem die Nachfrage- und Angebotsmengen dieser k Güter für die q Regionen über die Beziehungen 3.4 festgelegt werden 1). Mit anderen Worten, die regionalen Überschußnachfrage- und Überschußangebotsmengen, die in den Beziehungen 3.4 zum Ausdruck kommen, bilden die Konstanten der rechten Hand der k Transportprobleme.
2. Aufgrund der Definition der Simplexmultiplikatoren kann der Wert der Zielfunktion jeder Basislösung der Transportaufgabe auch als Vektorprodukt der Konstanten der rechten Hand und den zu der Basislösung gehörenden Simplexmultiplikatoren ausgedrückt werden. Da aber die Konstanten der rechten Hand (wie bereits in 1 festgestellt) lineare Funktionen der Produktionsaktivitäten sind, kann man, so lange die Simplexmultiplikatoren konstant sind, den Wert der Zielfunktion der Transportaufgabe als eine Funktion der Produktionsvariablen ausdrücken. Mit anderen Worten, es gilt

1) Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O. S. 121.

$$\sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q f_i^{gh} z_i^{gh}$$

$$= \sum_r^q \left[\sum_{i=1}^k (d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^r x_j^{or}) \delta_i^r - \sum_{i=1}^k (s_i^r + \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{or}) \mu_i^r \right] \quad (3.8)$$

wobei δ_i^r und μ_i^r mit $i = 1, \dots, k$ und $r = 1, \dots, q$ die zu der entsprechenden Basis gehörende Simplexmultiplikatoren sind.

3. Die Simplexmultiplikatoren bleiben konstant, solange die zulässige Basislösung des Transportproblems sich nicht verändert.

Die Autoren addieren nun die rechte Seite der Beziehung 3.8 zu der Zielfunktion der Produktionsaufgabe 3.3.

Es ergibt sich damit als neue Zielfunktion:

$$\left\{ \sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_r^q \left[\sum_{i=1}^k (d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^r x_j^r) \delta_i^r - \sum_{i=1}^k (s_i^r + \sum_j^n p_{ij}^r x_j^r) \mu_i^r \right] \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (3.8a)$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern erhalten wir daraus:

$$\left\{ \sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_r^q \sum_i^k d_i^r \delta_i^r + \sum_r^q \sum_i^k \sum_j^n \delta_i^r v_{ij}^r x_j^r - \sum_r^q \sum_i^k s_i^r \mu_i^r - \sum_r^q \sum_i^k \sum_j^n \mu_i^r p_{ij}^r x_j^r \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (3.8b)$$

Die Ausdrücke mit x_j^r werden zusammengefaßt:

$$\left\{ \sum_r^q \left[\sum_j^n (c_j^r + \sum_i^k \delta_i^r v_{ij}^r - \sum_i^k \mu_i^r p_{ij}^r) x_j^r \right] + \sum_r^q \left[\sum_i^k d_i^r \delta_i^r - \sum_i^k s_i^r \mu_i^r \right] \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (3.8c)$$

Das ist die neue Zielfunktion der Produktionsaufgabe 3.3. Wie man sieht, hat der zweite Ausdruck in eckigen Klammern keinen Einfluß auf den optimalen Wert der Produktionsaktivitäten, da er für gegebene Werte von δ_i^r und μ_i^r lediglich eine Konstante darstellt. Die Interpretation dieser Zielfunktion erfolgt später. Wir schreiben jetzt die Aufgabe 3.9:

$$\sum_r^q \sum_j^n (p_{ij}^r - v_{ij}^r) x_j^r \geq \sum_r^q (d_i^r - s_i^r) \quad (3.9a)$$

$$i = 1, \dots, k$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad (3.9b)$$

$$i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q$$

$$x_j^r \geq 0$$

$$\left\{ \sum_r^q \left[\sum_j^n (c_j^r + \sum_i^k \delta_i^r v_{ij}^r - \sum_i^k \mu_i^r p_{ij}^r) x_j^r \right] + \sum_r^q \left[\sum_i^k d_i^r \delta_i^r - \sum_i^k s_i^r \mu_i^r \right] \right\} \rightarrow \text{Min} \quad (3.9c)$$

Damit sind wir in der Lage, durch die entsprechende Wahl der Werte der Produktionsvariablen die Kosten insgesamt (Produktionskosten + Transportkosten) zu minimieren. Es muß lediglich sichergestellt werden, daß die Änderungen der Produktionsvariablen die zulässige Basislösung der Transportaufgabe, zu der die Simplexmultiplikatoren μ_i^r bzw. δ_i^r entsprechen, nicht verändern. Es stellt sich heraus, daß dies eine Bedingung darstellt, die sehr schwer einzuhalten ist.

Um die Zulässigkeit der gegebenen Basislösung der Transportaufgabe zu gewährleisten, fügen Mennes u.a. der Aufgabe 3.9 die Bedingung hinzu, daß die Größen 3.4 ihre Vorzeichen nicht verändern dürfen.¹⁾ Das bedeutet, daß eine Region, die in der ursprünglichen Lösung $\mathcal{R}_j^r$ ($r = 1, \dots, q; j = 1, \dots, n$) als Nachfrager eines bestimmten Gutes auftrat, nicht zum Anbieter dieses Gutes werden darf, und umgekehrt. Auf diese Weise soll die Menge der zulässigen Lösungen der Aufgabe 3.9 in Teilmengen aufgeteilt werden, denen jeweils eine zulässige Basislösung der Transportaufgabe entspricht. Mit der Konstanz der zulässigen Basislösung der Transportaufgabe 3.6 wäre auch die Konstanz der entsprechenden Simplexmultiplikatoren gesichert. Die optimale Lösung wird dann gefunden, indem diese Teilmengen der Reihe nach untersucht werden. Der Optimalitätstest besteht darin, daß untersucht wird, ob die lokale optimale Lösung (in Bezug auf eine dieser Teilmengen) sich am Rande oder im Inneren des betreffenden Teilbereiches befindet. Falls die Lösung im Inneren liegt, muß dieses lokale Optimum das globale Optimum sein.

1) "The values if the u_r however correspond only to the particular set of basic variables ... in the basic feasible solution at hand. These variables remain in the basis only as long as the constants do not change in sign ..." , Mennes, Tinbergen und Waardenburg, The Element of Space in Development Planning, a.a.O. S. 121.

3.2 Kritik

Das Verfahren von Mennes u.a. scheitert daran, daß die erwähnten Bedingungen zur Konstanz der Simplexmultiplikatoren nicht ausreichen. Wie es sich herausstellt, sind hierzu erheblich komplexere Bedingungen notwendig, so daß auf diesem Weg kein effizienter Algorithmus entwickelt werden kann.

Den Nachweis, daß die genannte Bedingung von Mennes u.a. nicht genügt, um die Konstanz der zulässigen Basis der Transportaufgabe zu sicher, führen wir durch ein Gegenbeispiel: Betrachten wir das folgende einfache Transportproblem, das durch die Skizze unten charakterisiert sei. Die Pfeile geben eine zulässige Basislösung an, N_i ($i = 1, \dots, 4$) und A_j ($j = 1, \dots, 3$) sind Nachfrage- bzw. Angebotspunkte. Die Zahlen neben den N_i und A_j 's geben die entsprechenden Mengen an. Die Zahlen neben den Transportstrecken beziehen sich auf die transportierten Mengen. Die Koeffizienten der Transportkosten sind nicht angegeben, da sie keine Rolle spielen:

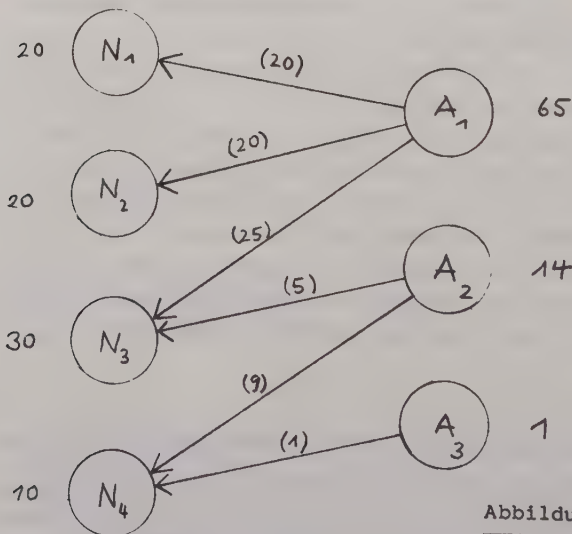


Abbildung 9

Nun variieren wir die Mengen in den Angebotspunkten. Dabei beachten wir, daß die Bedingung der Mennes u.a. eingehalten wird, d.h. überall wird weiterhin eine positive Menge angeboten. Die Skizze unten entspricht zu dieser neuen Situation. Es ist klar, daß unter diesen Umständen die alte Basis (die gestrichelten Flüsse) nicht mehr zulässig ist. Vielmehr muß eine neue zulässige Basis gefunden werden (die durchgezogen gezeichneten Flüsse).

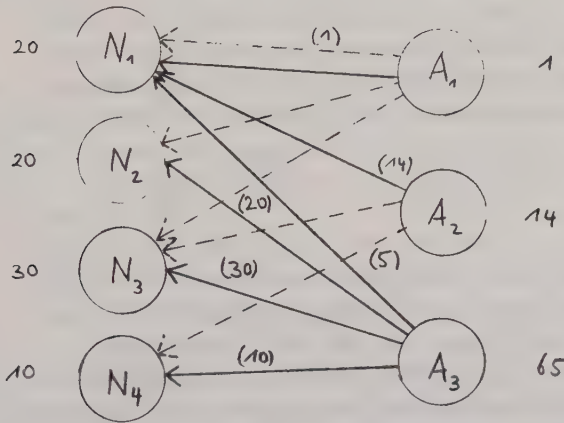


Abbildung 10

Unser Einwand gegen die Methode von Mennes u.a. läßt sich auch ganz allgemein begründen, wenn wir die folgende lineare Programmierungsaufgabe betrachten

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ c'x &\rightarrow \text{Min} \end{aligned}$$

es gelte

$$x = (\bar{x}, \hat{x}) \quad \text{mit} \quad \hat{x} = 0$$

und

$$A = [\bar{A}, \hat{A}] \quad \text{mit} \quad \bar{A} \bar{x} = b$$

Das heißt, die Variablen $\bar{x}$ stellen eine zulässige Basislösung dar. $(\bar{A})^{-1}$ sei die Inverse von $\bar{A}$. Es gilt dann

$$\bar{x} = (\bar{A})^{-1} b$$

Dieser Ausdruck zeigt den Zusammenhang zwischen den Konstanten der rechten Hand und dem Wert der zulässigen Basislösung. Die Bedingung, daß die Basislösung $\bar{x}$ bei Variationen von b zulässig bleibt, lautet dann:

$$(\bar{A})^{-1} b = \bar{x} \geq 0 \quad \text{d.h.} \quad (\bar{A})^{-1} b \geq 0$$

b darf sich nur so ändern, daß sie dieser Bedingung genügt. Und nur wenn diese Bedingung eingehalten wird, bleibt die zulässige Basislösung $\bar{x}$ konstant. Mennes u.a. fordern aber lediglich, daß die Elemente von b ihre Vorzeichen nicht ändern. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, sie seien alle positiv. Dann lautet ihre Bedingung, daß

$$b \geq 0$$

Wie man sofort sieht, genügt jedoch die Einhaltung von dieser Bedingung nicht, um die Gültigkeit von

$$(\bar{A})^{-1} b \geq 0$$

zu sichern. Nur in dem Sonderfall, wenn alle Elemente der Inversen positiv sind, gilt

$$b \geq 0 \implies (\bar{A})^{-1} b \geq 0$$

In diesem Fall könnten wir

$$b \geq 0 \quad \text{mit} \quad (\bar{A})^{-1} \quad \text{premultiplizieren}$$

und

$$(\bar{A})^{-1} b \geq (\bar{A})^{-1} 0 = 0 \Rightarrow (\bar{A})^{-1} b \geq 0$$

erhalten. Bei einem Transportproblem hat jedoch die Inverse einer zulässigen Basis immer negative Elemente, so daß der obige Sonderfall nicht gegeben ist.

Damit ist es deutlich geworden, daß im allgemeinen das Verfahren von Mennes, Tinbergen und Waardenburg nicht zu einer optimalen Lösung führen wird. Wenden wir uns dem zweiten Verfahren zu, das von Aleshin und Mednitzki entwickelt wurde.

3.3 Das Verfahren von Aleshin und Mednitzki

Als Ausgangsbasis benützen wir das Modell 2.3, das durch Einführung von Export- und Importaktivitäten (in der bereits beschriebenen Weise) erweitert worden ist. Es sei darauf hingewiesen, daß die Außenhandelsaktivitäten neben ihrer inhaltlichen Bedeutung auch eine formale Rolle spielen. Sie bewirken, daß das Modell 3.10 unten immer eine zulässige Lösung hat, wenn nur die Bedingungen 3.10c (das sind die Bedingungen hinsichtlich der immobilien Güter) erfüllt werden können. Daher hat auch jede Transportaufgabe, die man durch die Zuordnung von festen Werten an die Produktionsvariablen x_j^r ($r = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, n$) erhält, immer eine zulässige Lösung.

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_h^q z_i^{rh} - z_i^{rE} \geq -s_i^r \quad (3.10a)$$

$$- \sum_j^n v_{ij}^r x_j^r + \sum_g^q z_i^{gr} + z_i^{Ir} \geq d_i^r \quad (3.10b)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad (3.10c)$$

$$i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q$$

$$x_j, z_i^{hg}, z_i^{rE}, z_i^{Ir} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_i^k \sum_g^q \sum_h^q f_i^{hg} z_i^{hg} + \sum_r^q \sum_i^k f_i^{Ir} z_i^{Ir} \\ & - \sum_r^q \sum_i^k f_i^{rE} z_i^{rE} \rightarrow \text{Min} \end{aligned} \quad (3.10d)$$

Dazu entspricht das duale Problem:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r \gamma_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r \leq c_j^r \quad (3.11a)$$

$$j = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, q$$

$$-\sigma_i^h + r_i^g \leq f_i^{hg} \quad (3.11b)$$

$$r_i^r \leq f_i^{Ir} \quad (3.11c)$$

$$\sigma_i^r \geq f_i^{rE} \quad (3.11d)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad r, h, g = 1, \dots, q$$

$$\sigma_i^r, r_i^r, \pi_i^r \geq 0$$

$$-\sum_r \sum_i s_i^r \sigma_i^r + \sum_r \sum_i d_i^r r_i^r + \sum_r \sum_{i=k+1}^m b_i^r \pi_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (3.11e)$$

Die Lösungsmethode von Aleshin und Mednitzki besteht darin, daß die regionalen Produktionsaktivitäten zu einer einzigen Aktivität aggregiert und auf diese Weise ein vereinfachtes Modell mit wesentlich weniger Variablen erhalten wird. Dieses aggregierte Modell wird Makromodell genannt. Das ursprüngliche Modell 3.10 wird analog als Mikromodell bezeichnet. Die Aggregation setzt eine Gewichtung der betreffenden Aktivitäten voraus. Diese Gewichtung wird zunächst beliebig gewählt. Wenn durch a priori Informationen bekannt ist, daß Q_j^r mit $j = 1, \dots, n$ und $r=1, \dots, q$ eine zulässige Lösung darstellen, könnten die Gewichtungsfaktoren als

$$w_j^{or} = \frac{x_j^{or}}{\sum_j^n x_j^{or}}, \quad r = 1, \dots, q; \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12a)$$

definiert werden. Wir vereinbaren noch folgende Bezeichnungen

$$p_i^{or} = \sum_j^n p_{ij}^r w_j^{or} \quad i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q \quad (3.12b)$$

$$v_i^{or} = \sum_j^n v_{ij}^r w_j^{or} \quad i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q \quad (3.12c)$$

$$a_i^{or} = \sum_j^n a_{ij}^r w_j^{or} \quad i = k+1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, q \quad (3.12d)$$

$$c^r = \sum_j^n c_j^r w_j^{or} \quad r = 1, \dots, q \quad (3.12e)$$

$$u^r = \sum_j^n x_j^{or} \quad r = 1, \dots, q \quad (3.12f)$$

Wir definieren nun das Makromodell, das den Gewichten w_j^{or} entspricht. Das Makromodell 3.13 hat die Eigenschaft, daß jede zulässige Lösung davon auch eine zulässige

Lösung des Modells 3.10 liefert. $\bar{u}^r$ mit $r=1, \dots, q$ seien eine zulässige Lösung des Makromodells 3.13. Dann sind die $\bar{x}_j^r$ eine zulässige Lösung des Mikromodells, wobei

$$\bar{x}_j^r = \bar{w}_j^r \bar{u}^r \quad j=1, \dots, n; r=1, \dots, q$$

gilt.

Das Makromodell lautet:

$$\bar{p}_i^r \bar{u}^r - \sum_h^q \bar{z}_i^{rh} - \bar{z}_i^{rE} \geq -\bar{s}_i^r \quad (3.13a)$$

$$-\bar{v}_i^r \bar{u}^r + \sum_g^q \bar{z}_i^{gr} + \bar{z}_i^{Ir} \geq \bar{d}_i^r \quad (3.13b)$$

$$i=1, \dots, k; r=1, \dots, q$$

$$\bar{a}_i^r \bar{u}^r \geq \bar{b}_i^r \quad (3.13c)$$

$$i=k+1, \dots, m; r=1, \dots, q$$

$$\bar{u}^r, \bar{z}_i^{hg}, \bar{z}_i^{Ir}, \bar{z}_i^{rE} \geq 0$$

$$\sum_r^q \bar{c}_i^r \bar{u}^r + \sum_i^k \sum_h^q \sum_g^q \bar{f}_i^{hg} \bar{z}_i^{hg} + \sum_i^k \sum_r^q \bar{f}_i^{Ir} \bar{z}_i^{Ir}$$

$$- \sum_i^k \sum_r^q \bar{f}_i^{rE} \bar{z}_i^{rE} \rightarrow \text{Min} \quad (3.13d)$$

Da 3.13 erheblich weniger Variable enthält als das ursprüngliche Modell 3.10, kann es dazu benützt werden, zulässige Lösungen für das Mikromodell zu ermitteln. Dem Problem 3.13 entspricht das duale Problem 3.14

$$\sum_{i=1}^k \bar{p}_i^r \lambda_i^r - \sum_{i=1}^k \bar{q}_i^r \eta_i^r + \sum_{i=k+1}^m \bar{a}_i^r \gamma_i^r \leq \bar{c}^r \quad (3.14a)$$

$$r = 1, \dots, q$$

$$-\lambda_i^h + \eta_i^g \leq f_i^{hg} \quad (3.14b)$$

$$\eta_i^r \leq f_i^{Ir} \quad (3.14c)$$

$$\lambda_i^r \geq f_i^{rE} \quad (3.14d)$$

$$\lambda_i^r, \eta_i^r \geq 0 \quad i=1, \dots, k ; \gamma_i \geq 0 \quad i=k+1, \dots, m$$

$$r, g, h = 1, \dots, q$$

$$-\sum_r \sum_i^k s_i^r \lambda_i^r + \sum_r \sum_i^k d_i^r \eta_i^r + \sum_r \sum_{i=k+1}^m b_i^r \gamma_i^r \rightarrow \text{Max} \quad (3.14e)$$

$\lambda_i^*, \eta_i^*, \gamma_i^*$ seien eine optimale Lösung des Problems 3.14

Durch Vergleich des Problems mit 3.11 erkennt man, daß jede zulässige Lösung von 3.14 auch den Bedingungen 3.11b, 3.11c und 3.11d genügen muß, da diese mit 3.14b, 3.14c

und 3.14d identisch sind. Daher genügen auch $\lambda_i^*, \eta_i^*, \gamma_i^*$ den Bedingungen (3.11b, 3.11c) und 3.11d. Anders ausgedrückt, die optimalen Werte $\lambda_i^*, \eta_i^*, \gamma_i^*$ definieren ein regionales Preissystem, das die optimale Lösung der Transportaufgabe für die gegebenen Aggregationsgewichte wiedergibt. Im nächsten Schritt werden die so ermittelten regionalen Preise als lokale Angebots- und Nachfragepreise interpretiert. Die Regionen setzen voraus, daß die k mobilen Güter zu den geltenden Preisen η_i^* und λ_i^* in unbegrenzten Mengen bezogen bzw. geliefert werden können und suchen denjenigen Aktivitätsvektor, der unter dieser Voraussetzung den regionalen Gewinn maximiert. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme von unendlich elastischen Nachfrage- und Angebotsfunktionen. Man könnte diese Annahme auch als die Annahme der vollständigen Konkurrenz bezeichnen, da sie impliziert, daß jede Region sich wie ein Marktteilnehmer bei vollständiger Konkurrenz verhält. Damit ist für jede Region r das folgende Problem gegeben:

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r \geq b_i^r \quad \begin{matrix} i = k+1, \dots, m; \\ r = 1, \dots, q \end{matrix} \quad (3.15a)$$

$$x_j^r \geq 0$$

$$\sum_j^n \left(\sum_i^k p_{ij}^r \lambda_i^* - \sum_i^k v_{ij}^r \eta_i^* - c_j^r \right) x_j^r \rightarrow \text{Max} \quad (3.15b)$$

Die Zielfunktion 3.15b ist identisch mit der Zielfunktion

$$\sum_j^n (c_j^r + \sum_i^k v_{ij} \eta_i^* - \sum_i^k p_{ij} \lambda_i^*) x_j^r \rightarrow \text{Min} \quad (3.16)$$

Die Ersetzung der ursprünglichen Zielfunktionen der Regionen, die nur die Kostenkoeffizienten c_j^r enthielten, durch 3.15a beziehungsweise 3.16 bedeutet, daß die Regionen bei der Auswahl der Produktionsaktivitäten nun nicht mehr lediglich deren Kostenkoeffizienten berücksichtigen, sondern auch prüfen, wieviel diese oder jene Aktivität von den "teueren" mobilen Gütern verbraucht beziehungsweise produziert. Eine Aktivität, die von einem teureren mobilen Gut viel produziert, wird bei sonst gleichen Umständen einer anderen Aktivität vorgezogen, die von dem gleichen Gut weniger produziert oder gar verbraucht.

Wie man sieht wird die Produktionsaufgabe in r unabhängige Probleme zerlegt. Gleichzeitig entfallen ein großer Teil der Restriktionen, da die Aufgabe 3.15 nur die Restriktionen bezüglich der immobilien Güter enthält.

Die Lösung der Aufgabe 3.15 liefert für jede Region r einen Aktivitätsvektor x_j^r , der bei der Bestimmung der neuen, verbesserten Aggregationsgewichte w_j^r für die nächste Runde verwendet wird.

3.4 Vergleich der beiden Verfahren und Kritik

Die Analogie zwischen dem Verfahren von Aleshin und

Mednitzki und dem Algorithmus von Mennes u.a. ist offensichtlich. Der erste Schritt, die Lösung der Aufgabe 3.13 beziehungsweise 3.14 liefert eine optimale Lösung der Transportaufgabe unter der Voraussetzung, daß die Produktionsstruktur der Regionen gegeben ist. Diese Einschränkung ist etwas weniger restriktiv als die Zuordnung von festen Werten zu den Produktionsaktivitäten, wie es bei Mennes u.a. geschieht. Im Prinzip besteht jedoch kein Unterschied, da auch hier die Menge der zulässigen Lösungen der Produktionsaufgabe in Teilmengen aufgegliedert wird, die nacheinander untersucht werden. Dafür muß man in Kauf nehmen, daß statt der k-unabhängigen Transportaufgaben das erheblich größere Problem 3.13 gelöst werden muß. Demgegenüber wird in dem Produktionsbereich mit einfacheren Problemen operiert. Statt des Problems 3.9, das auch noch durch die Vorzeichenbeschränkungen zwecks Sicherung der Konstanz der Simplexmultiplikatoren vergrößert wird, brauchen lediglich die r unabhängigen Aufgaben 3.15 hintereinander gelöst zu werden. Ein Vergleich der Zielfunktion der Aufgabe 3.9 mit der Zielfunktion 3.16 macht die Ähnlichkeit der beiden Verfahren besonders deutlich.

Die beiden Zielfunktionen sind identisch bis auf eine Konstante, die keinen Einfluß auf die Auswahl der optimalen Produktionsaktivitäten hat. Um diese Identität zu sehen, brauchen wir in 3.16 lediglich $\delta_i^r = \eta_i^{*r}$ und $\mu_i^r = \lambda_i^{*r}$ zu setzen.

Daraus folgt, daß die Interpretation, die wir oben für die Zielfunktion 3.16 gegeben haben, auch für 3.9 Gültigkeit besitzt.

Das Problem, die Konstanz der Preise λ_i^{*r} und η_i^{*r} zu sichern, bleibt jedoch auch in dem Verfahren von Aleshin und Mednitzki ungelöst.

Im Gegensatz zu Mennes u.a. sind sie sich über diesen schwachen Punkt im klaren und weisen darauf hin, daß die Lösungen $\hat{x}_j^r$ der Probleme 3.15 nicht ohne weiteres zur Bestimmung der neuen Gewichte $\hat{w}_j^r$ verwendet werden dürfen. Vielmehr geben die optimalen Lösungen $\hat{x}_j^r$ lediglich die Richtung an, in der sich die ursprünglichen Aggregationsgewichte $\bar{w}_j^r$ zu verändern haben. Wie weit in der gegebenen Richtung gegangen werden kann (i.e. die Schrittlänge), muß mit heuristischen Methoden, durch trial and error gefunden werden. Mit anderen Worten sollen die neuen Gewichte nach der Formel

$$\hat{w}_j^r = \bar{x}_j^r \cdot K^r + \hat{x}_j^r (1 - K^r); \quad 0 \leq K^r \leq 1$$

$j = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, q$

bestimmt werden. Dabei wird der konkrete Wert der Variable K^r durch trial and error so gewählt, daß die Lösung der Aufgabe 3.13 verbessert wird. Abbildung 11 zeigt die geometrische Bedeutung dieser Formel.

Die beiden Werte $\bar{x}_j^r$ und $\hat{x}_j^r$ sind bekannt. $\hat{w}_j^r$ wird als eine Linearkombination dieser beiden

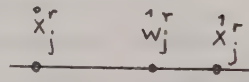


Abbildung 11

Werte gewählt, wobei eben noch die Verbesserung des optimalen Werts der Aufgabe 3.13 beachtet werden muß. Da aber der optimale Wert von 3.13 von den Aggregationsgewichten aller q Regionen abhängt, müssen die Gewichte für alle Regionen gleichzeitig bestimmt werden. Dies ist eine Aufgabe, die nicht leicht zu lösen ist und die Effizienz des ganzen Verfahrens in Frage stellt.

3.5 Die Interpretation des Problems 2.8 als lineares Spiel und Lösung durch fiktives Abspielen.

Wir schlagen nun einen Algorithmus vor, der die Grundgedanken der diskutierten Verfahren vereinigt und deren

Unzulänglichkeiten vermieden. Anschließend zeigen wir, daß der bekannte Algorithmus von Benders¹⁾ die mathematische Grundlage unseres Verfahrens wie auch der oben diskutierten Verfahren bildet.

Die Lösung des Problems 2.8 wird in einem iterativen Verfahren vorgenommen, der einen dynamischen Anpassungsprozeß auf dem Markt simuliert und mit der Methode der Zwei-Ebenen-Planung von Kornai²⁾ verwandt ist. Das Modell enthält zwei Entscheidungsebenen. Die erste Ebene wird gebildet von der Zentrale, deren Aufgabe das Finden von optimalen Versorgungsbeziehungen und den entsprechenden Preisen für die regionalen Produktionseinheiten ist. Die zweite Entscheidungsebene bilden die regionalen Produktionseinheiten, die ihre Entscheidungen an den eigenen Kosten und an den von der Zentrale bekanntgegebenen Preisen orientieren. Dabei fällt jede regionale Produktionseinheit ihre Entscheidungen unabhängig von den anderen.

Die τ -te regionale Produktionsaufgabe:

Diese Aufgabe erhalten wir, wenn jede Region davon ausgeht, daß sie die mobilen Produkte $i=1, \dots, k$ zu den herrschenden Preisen $\tau-1, \tau-1_r$ in beliebigen

Mengen kaufen beziehungsweise verkaufen kann und unter dieser Voraussetzung ihren Gewinn maximiert.

Dabei wird der regionale Gewinn definiert als der

Überschuß der Erlöse $\sum_{i=1}^k p_{ij} \bar{q}_i^{(\tau-1)_r}$ über den Ausgaben $\sum_{i=1}^k q_{ij} \gamma_i^{(\tau-1)_r}$ und den Produktionskosten c_j^r .

1) Benders, "Partitioning Procedures", a.a.O.

2) Kornai, Mathematische Methoden, a.a.O. S. 329-351 und S. 454-471.

Da höhere Einkommen höhere Konsumnachfrage bedeuten, tritt auch y^r mit einem negativen Koeffizienten $-\sum_{i=1}^k t_{ij}^{(\tau-1)} y_i^{(\tau-1)}$ auf. Diese Annahme über die Verhaltensweise der regionalen Produzenten kann auch die Annahme der vollständigen Konkurrenz genannt werden, da die Produzenten sich wie Marktteilnehmer auf einem Markt mit vollständiger Konkurrenz verhalten sollen. Formal wird die τ -te regionale Produktionsaufgabe wie folgt definiert:

$$r=1, \dots, q \left\{ \begin{array}{l} \sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_{ij}^r y^r \geq b_i^r \quad (3.17a) \\ i = k+1, \dots, m \\ \sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \geq 0 \quad (3.17b) \\ x_j^r, y^r \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \bar{G}_i^{(\tau-1)} - \sum_{i=1}^k t_{ij}^r \bar{y}_i^{(\tau-1)} - c_j^r \right] x_j^r - y^r \sum_{i=1}^k t_{ij}^r \bar{y}_i^{(\tau-1)} \end{array} \right. \rightarrow \text{Max (3.17c)}$$

Die optimale Lösung von 3.17 sei

$$\begin{matrix} (\tau) & (\tau) \\ x_j^r & y_j^r \end{matrix}$$

mit

Die τ -te zentrale Versorgungsaufgabe:

Die τ -te zentrale Versorgungsaufgabe erhalten wir, indem in den Regionen die regionalen Produktionsprogramme

$$\begin{matrix} \tau \\ x_j \end{matrix} \quad j=1, \dots, n; r=1, \dots, q \text{ und die Höhe der}$$

zusätzlichen regionalen Einkommen y^r festgelegt werden. Damit wird für jedes der k mobilen Güter eine ganz bestimmte räumliche Verteilung der Nachfrage und des Angebots definiert:

$$-S_i^r - \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{(r)} \quad i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q \quad (3.18a)$$

$$d_i^r + \sum_j^n u_{ij}^r x_j^{(r)} + t_i^r y^r \quad (3.18b)$$

Die Zentrale steht somit vor der Aufgabe, diese k unabhängigen Versorgungsaufgaben zu lösen und einen kostenminimierenden Transportplan für jedes Gut zu erstellen. Diese Aufgabe ist immer lösbar, da etwaige Nachfragebeziehungsweise Angebotsüberschüsse mit Hilfe von Import- beziehungsweise Exportaktivitäten immer ausgeglichen werden können. Formal wird die τ -te zentrale Versorgungsaufgabe wie folgt definiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_h^q z_i^{rh} - z_i^{rE} \geq -S_i^r - \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{(r)} \quad (3.19a) \\ \sum_g^q z_i^{gr} + z_i^{Ir} + \sum_d^u z_i^{dr} \geq d_i^r + \sum_j^n u_{ij}^r x_j^{(r)} + t_i^r y^r \quad (3.19b) \\ -z_i^{dr} \geq -S_i^{dr} \quad (3.19c) \\ z_i^{gh}, z_i^{rE}, z_i^{Ir}, z_i^{dr} \geq 0 \quad g, h, r=1, \dots, q; d=1, \dots, u \\ \sum_h^q \sum_g^q f_{ih}^{gh} z_i^{gh} + \sum_r^q f_{ir}^{Ir} z_i^{Ir} - \sum_r^q f_{ir}^{rE} z_i^{rE} + \sum_r^q \sum_d^u f_{id}^{dr} z_i^{dr} \rightarrow \text{Min} \quad (3.19d) \end{array} \right. \quad i=1, \dots, k$$

$\begin{matrix} (\tau) \\ *g^h \\ z_i \end{matrix}$, $\begin{matrix} (\tau) \\ *r^E \\ z_i \end{matrix}$, $\begin{matrix} (\tau) \\ *I_r \\ z_i \end{matrix}$ und $\begin{matrix} (\tau) \\ *d_r \\ z_i \end{matrix}$ seien die optimalen
 Lösungen von 3.19.

Für die Interpretation der zentralen Versorgungsaufgabe
 ist es nützlich, die zu 3.19 duale Aufgabe zu betrachten.
 Wir schreiben sie wie folgt:

$$\begin{cases}
 -\sigma_i^h + \gamma_i^g \leq f_i^{hg} & (3.20a) \\
 \gamma_i^r \leq f_i^{I_r} & (3.20b) \\
 \sigma_i^r \geq f_i^{rE} & (3.20c) \\
 \gamma_i^r - \rho_i^{dr} \leq f_i^{dr} & (3.20d) \\
 \sigma_i^r, \gamma_i^r, \rho_i^{dr} \geq 0 \quad g, h, r = 1, \dots, g; \quad d = 1, \dots, d^r \\
 -\sum_{r=1}^g \sigma_i^r \left(s_i^r + \sum_j^n p_{ij}^{r(\tau)} x_j^r \right) + \sum_{r=1}^g \gamma_i^r \left(d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^{r(\tau)} x_j^r + t_i^r y^r \right) & (3.20e) \\
 -\sum \rho_i^{dr} s_i^{dr} \longrightarrow \text{Max}
 \end{cases}$$

Wenn wir einmal von den fiktiven Angebotspunkten absehen,
 so erkennen wir, daß die Konstanten der Zielfunktion 3.20e
 durch die Ausdrücke 3.18a beziehungsweise 3.18b definiert
 werden. Diese stellen, wenn positiv, eine Nachfrage der
 betreffenden Region = Lieferung der Zentrale und wenn
 negativ, Angebot der Region = Bezug der Zentrale dar.

Somit können wir die zentrale Versorgungsaufgabe auch als ein Preisbestimmungsproblem auffassen, in der die Zentrale versucht, den Wert der Lieferungen an die Regionen, saldiert um den Wert der Bezüge von den Regionen, zu maximieren.

Nachdem wir die regionale Produktionsaufgabe und die zentrale Versorgungsaufgabe definiert haben, muß noch das Optimalitätskriterium angegeben werden. Danach können wir die einzelnen Schritte des Iterationsverfahrens formulieren.

Das Kriterium zur Beendigung der Iteration :

Zunächst ist es notwendig, den Genauigkeitsgrad festzulegen, mit dem wir die optimale Lösung der Aufgabe 2.8 approximieren wollen. Nehmen wir an, wir wären mit dem Ergebnis zufrieden, wenn der erreichte Wert der Zielfunktion der ursprünglichen Aufgabe in der τ -ten Runde, $\xi^{(\tau)}$, von dem (nicht bekannten) optimalen Wert der Zielfunktion, ξ^* , nicht mehr als ϵ abweicht, das heißt, wenn $(\xi^{(\tau)} - \xi^*) \leq \epsilon$ gilt.

Außerdem beachten wir, daß die regionalen Produktionsprogramme $x_j^{(\tau)r}$ zusammen mit den zentralen Transportplänen z_i^{*h} und den entsprechenden Import- und Exportplänen $z_i^{(\tau)r}$, z_i^{*r} sowie den z_i^{dr} Werten für die fiktiven Aktivitäten in jeder Runde τ eine zulässige Lösung für die ursprüngliche Aufgabe 2.8 liefern. Der erreichte Wert der Zielfunktion $\xi^{(\tau)}$ in der τ -ten Runde wird demnach gefunden, indem diese Größen in die Zielfunktion der Aufgabe 2.8 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \xi^{(\tau)} = & \sum_r \sum_j^n c_j^{(\tau)} x_j^{(\tau)} + \sum_i \sum_h \sum_g^q f_i^{gh} z_i^{gh} + \sum_i \sum_r \sum_d^u f_i^{dr} z_i^{dr} \\ & - \sum_r \sum_i^k f_i^{rE} z_i^{rE} + \sum_r \sum_i^k f_i^{Ir} z_i^{Ir} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hingegen ergibt das Einsetzen der Werte $\pi_i^{(\tau)}, \sigma_i^{(\tau-1)}, v_i^{(\tau-1)}$ und $\rho_i^{(\tau-1)}$ in die Zielfunktion der Aufgabe 2.9 eine untere Grenze ξ für den gesuchten optimalen Wert ξ^* .
Mit anderen Worten, wenn

$$\begin{aligned} \xi^{(\tau)} = & - \sum_r \sum_i^k \sigma_i^{(\tau-1)} s_i^{(\tau-1)} + \sum_r \sum_i^k v_i^{(\tau-1)} d_i^{(\tau-1)} - \sum_r \sum_d^u \sum_i^k \rho_i^{(\tau-1)} d_r^{(\tau-1)} s_i^{(\tau-1)} \\ & + \sum_r \sum_{i=k+1}^m \pi_i^{(\tau)} b_i^{(\tau)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

dann gilt:

$$\xi^* \geq \xi^{(\tau)} \quad \text{für alle } \tau$$

Dabei ist $\pi_i^{(\tau)}, \omega_i^{(\tau)}$ mit $i=k+1, \dots, m; r=1, \dots, q$ die optimale Lösung der zu 3.17 dualen Aufgabe, sie entspricht zu $x_j^{(\tau)}, y_r^{(\tau)}$.

Alternativ können wir auch

$$\begin{aligned} \sum_r^{(\tau)} = & \sum_r^q \left[\sum_{j=1}^n \left(- \sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^{(\tau-1)} + \sum_{i=1}^k u_{ij}^r \gamma_i^{(\tau-1)} + c_j^r \right) x_j^{(\tau)} + y^r \sum_{i=1}^k t_i^r \gamma_i^{(\tau-1)} \right] \\ & + \sum_r^q \left[- \sum_{i=1}^k \sigma_i^{(\tau-1)} s_i^r + \sum_{i=1}^k \gamma_i^{(\tau-1)} d_i^r - \sum_d^u \sum_{i=1}^k p_i^{(\tau-1)} d_i^r s_i^r \right] \quad (3.23) \end{aligned}$$

schreiben.

Die Tatsache, daß der Ausdruck 3.23 eine untere Grenze für den optimalen Wert der Aufgabe 2.8 liefert, kann man sehen, wenn man bedenkt, daß die $x_j^{(\tau)}, y^{(\tau)}$

die optimalen Lösungen der Aufgabe 3.17 sind. Dieses Problem ist wiederum analog der Aufgabe 3.9 in dem Verfahren von Mennes u.a. aufgebaut. Das heißt, durch die Optimierung von 3.17 in der τ -ten Runde aufgrund der Preise $\sigma_i^{(\tau-1)}, \gamma_i^{(\tau-1)}$ der $(\tau-1)$ -ten Runde werden die

Produktionskosten + Transportkosten minimiert, wenn angenommen werden kann, daß die regionalen Preise

$\sigma_i^{(\tau-1)}, \gamma_i^{(\tau-1)}$ im Laufe der Optimierung konstant bleiben. Da aber in der Regel diese Annahme nicht erfüllt ist, wird das tatsächliche Optimum höher liegen als der Wert, den uns die Lösung von 3.17 in der τ -ten Runde in Verbindung mit der Lösung der Versorgungsaufgabe von der $(\tau-1)$ -ten Runde angibt. Das Optimum kann bestenfalls gleich (wenn die Preise tatsächlich konstant bleiben) aber nicht kleiner sein. Einen Beweis für diese Tatsache geben wir weiter unten an ¹⁾.

1) Vgl. Teil 5.2 unten.

Nachdem das Kriterium zur Beendigung der Iteration formuliert worden ist, können wir dazu übergehen, die einzelnen Schritte der Iteration zu beschreiben:

3.51 Die Iteration

Die τ -te Runde der Iteration:

1. Schritt (wird von den Regionen durchgeführt)

1.1 Die von der Zentrale mitgeteilten Preise $\overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\sigma}}_i^r$ und $\overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\gamma}}_i^r$ werden benützt, um für die τ -te Runde gültigen Preise $\overset{(\tau-1)}{\sigma}_i^r$ und $\overset{(\tau-1)}{\gamma}_i^r$ zu berechnen:

$$\overset{(\tau-1)}{\sigma}_i^r = \frac{1}{\tau-1} \left[\overset{(1)}{\overset{*}{\sigma}}_i^r + \overset{(2)}{\overset{*}{\sigma}}_i^r + \dots + \overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\sigma}}_i^r \right] \quad i=1, \dots, k;$$

$$\overset{(\tau-1)}{\gamma}_i^r = \frac{1}{\tau-1} \left[\overset{(1)}{\overset{*}{\gamma}}_i^r + \overset{(2)}{\overset{*}{\gamma}}_i^r + \dots + \overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\gamma}}_i^r \right] \quad r=1, \dots, q$$

oder identisch damit:

$$\overset{(\tau-1)}{\sigma}_i^r = \frac{1}{\tau-1} \left[\overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\sigma}}_i^r + (\tau-2) \overset{(\tau-2)}{\sigma}_i^r \right] \quad i=1, \dots, k;$$

$r=1, \dots, q$

$$\overset{(\tau-1)}{\gamma}_i^r = \frac{1}{\tau-1} \left[\overset{(\tau-1)}{\overset{*}{\gamma}}_i^r + (\tau-2) \overset{(\tau-2)}{\gamma}_i^r \right]$$

- 1.2 Die q Regionen lösen die regionalen Produktionsaufgaben, indem sie die Zielfunktionen benützen, die

auf der Basis der Preise $\sigma_i^{(\tau-1)}$ und $\gamma_i^{(\tau-1)}$ errechnet worden sind.

- 1.3 Die optimalen Lösungen $x_j^{(\tau)*}$ und $y_r^{(\tau)*}$ werden benützt, um die für die τ -te Runde gültigen Produktionsprogramme $x_j^{(\tau)}$ und die dazu entsprechenden Einkommenszuwächse $y_r^{(\tau)}$ zu berechnen:

$$x_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \left[x_j^{(1)*} + x_j^{(2)*} + \dots + x_j^{(\tau)*} \right] \quad j = 1, \dots, n; \\ r = 1, \dots, q.$$

$$y_r^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \left[y_r^{(1)*} + y_r^{(2)*} + \dots + y_r^{(\tau)*} \right]$$

oder identisch damit:

$$x_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \left[x_j^{(\tau)*} + (\tau-1) x_j^{(\tau-1)} \right] \quad j = 1, \dots, n; \\ r = 1, \dots, q.$$

$$y_r^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \left[y_r^{(\tau)*} + (\tau-1) y_r^{(\tau-1)} \right]$$

- 1.4 Aufgrund der τ -ten regionalen Produktionsprogramme werden die regionalen Nachfrage- beziehungsweise Angebotsmengen bezüglich jedes mobilen Gutes $i=1, \dots, k$ errechnet und an die Zentrale mitgeteilt:

$$\left\{ -s_i^r - \sum_j^n p_{ij}^r x_j^{(r)r} \right\} \quad r=1, \dots, q;$$

$$i=1, \dots, k$$

$$\left\{ d_i^r + \sum_j^n v_{ij}^r x_j^{(r)r} + t_i^r y_j^{(r)r} \right\}$$

1.5 Berechne

$$\xi_j^{(r)r} = \sum_j^n c_j^r x_j^{(r)r}$$

sowie

$$\xi_j^{(r)r} = \sum_j^n \left(c_j^r + \sum_i^k v_{ij}^r v_i^{(r-1)r} - \sum_i^k p_{ij}^r \sigma_i^{(r-1)r} \right) x_j^{(r)r} + y_j^{(r)r} \sum_i^k t_i^r v_i^{(r-1)r}$$

und teile das Ergebnis der Zentrale mit.

2. Schritt (wird von der Zentrale durchgeführt)

2.1 Die regionale Verteilung der Nachfrage und des Angebots ist bekannt. Die zentrale Versorgungsaufgabe wird für jedes Gut einzeln gelöst.

Damit erhalten wir die optimale Lösung der Versorgungsaufgabe 3.19 der τ -ten Runde

$$\begin{matrix} (r) & (r) & (r) & (r) \\ *_{hg} & *_{rE} & *_{Ir} & *_{dr} \\ z_i & , z_i & , z_i & , z_i \end{matrix} \quad \begin{matrix} r=1, \dots, q; \\ i=1, \dots, k; d=1, \dots, u. \end{matrix}$$

Gleichzeitig erhalten wir die entsprechenden optimalen Preise, die die optimale Lösung der Aufgabe 3.20 darstellen:

$$\begin{matrix} (r) & (r) & (r) \\ *_{r} & *_{r} & *_{dr} \\ v_i & , \sigma_i & , y_i \end{matrix}$$

Daraus wird in der Zentrale der τ -te Versorgungsplan aufgestellt:

$$\overset{(\tau)}{z}_i^{hg} = \frac{1}{\tau} \left[\overset{(\tau)}{z}_i^{*hg} + (\tau-1) \overset{(\tau-1)}{z}_i^{hg} \right] \quad i=1, \dots, k;$$

$$\overset{(\tau)}{z}_i^{rE} = \frac{1}{\tau} \left[\overset{(\tau)}{z}_i^{*rE} + (\tau-1) \overset{(\tau-1)}{z}_i^{rE} \right] \quad h, g, r=1, \dots, q;$$

$$d=1, \dots, u^r.$$

$$\overset{(\tau)}{z}_i^{Ir} = \frac{1}{\tau} \left[\overset{(\tau)}{z}_i^{*Ir} + (\tau-1) \overset{(\tau-1)}{z}_i^{Ir} \right]$$

$$\overset{(\tau)}{z}_i^{dr} = \frac{1}{\tau} \left[\overset{(\tau)}{z}_i^{*dr} + (\tau-1) \overset{(\tau-1)}{z}_i^{dr} \right]$$

2.2 Berechne:

$$\begin{aligned} \overset{(\tau)}{\xi}^z &= \sum_i^k \sum_g^q \sum_h^q f_i^{gh} \overset{(\tau)}{z}_i^{*gh} + \sum_r^q \sum_i^k f_i^{Ir} \overset{(\tau)}{z}_i^{*Ir} - \sum_r^q \sum_i^k f_i^{rE} \overset{(\tau)}{z}_i^{*rE} \\ &\quad + \sum_d^{u^r} \sum_i^k \sum_r^q f_i^{dr} \overset{(\tau)}{z}_i^{*dr} \end{aligned}$$

$$\overset{(\tau)}{\xi} = \overset{(\tau)}{\xi}^z + \sum_r^q \overset{(\tau)}{\xi}^r;$$

$$\underline{\xi}^{(\tau)} = \sum_r^q \underline{\xi}^r + \sum_r^q \left[-\sum_i^k \overset{(\tau-1)}{G}_i^r + \overset{(\tau-1)}{S}_i^r \right]$$

$$+ \sum_i^k \overset{(\tau-1)}{V}_i^r d_i^r - \sum_i^k \sum_d^{u^r} \overset{(\tau-1)}{f}_i^{dr} \overset{(\tau-1)}{S}_i^{dr}]$$

2.3 Vergleiche:

$$\left(\begin{matrix} (r) \\ \xi \end{matrix} - \begin{matrix} (r) \\ \xi \end{matrix} \right) \leq \epsilon$$

Wenn ja, beende die Iteration. Den Regionen wird mitgeteilt, daß die Produktionsprogramme

$\begin{matrix} (r) \\ x_j \end{matrix}$ gültig bleiben.

Wenn nein, gehe zu 2.4.

2.4 Die Preise $\begin{matrix} (r) \\ * \\ \bar{c}_i \end{matrix}$ und $\begin{matrix} (r) \\ * \\ \bar{v}_i \end{matrix}$ werden den Regionen mitgeteilt.

3.52 Interpretation als dynamischer Anpassungsprozeß auf räumlich getrennten Märkten.

Wir haben ein Iterationsverfahren angegeben, das einen Anpassungsmechanismus auf $k \times q$ räumlich getrennten Märkten simuliert. Die Marktteilnehmer nehmen die gültigen Preise zur Kenntnis, berechnen auf dieser Grundlage ihre Angebots- und Nachfragemengen und teilen diese der Zentrale mit. Die Zentrale hat die Aufgabe, die Angebots- und Nachfragemengen für die einzelnen Güter aufeinander abzustimmen wobei noch darauf geachtet wird, daß die optimalen Transportrouten eingehalten werden. Als Ergebnis dieser Abstimmung stellt die Zentrale regionale Preise fest, die wiederum zur Grundlage von neuen Berechnungen in den Regionen werden. Die Zentrale könnte auch eine Handels- und Transportgesellschaft sein.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Konvergenz dieses Anpassungsprozesses wesentlich von der zugrundegelegten Verhaltensweise der Regionen und der Zentrale abhängt. Im Gegensatz zum klassischen Cobweb-Modell muß hier postuliert werden, daß die Regionen von ihren Erfahrungen lernen. Die Regionen gehen nicht davon aus, daß die Preise der Periode $\tau-1$ auch für die Periode τ gültig bleiben werden. Im Gegenteil, sie behalten auch die früheren Preise in Erinnerung, bilden den Durchschnitt aller bis dahin bekannt gewordenen Preise und nehmen diesen Durchschnittswert als Richtgröße. Analog gehen sie bei der Feststellung ihrer Produktionsprogramme vor. Die Produktionsprogramme werden als ein Durchschnitt aller bisher "erlebten" optimalen Lösungen berechnet. Mit anderen Worten, die Entscheidungsträger machen sich eine sehr vorsichtige Verhaltensweise zu eigen. Genau das bewirkt die Konvergenz des Systems.

3.52 Vergleich mit der Methode der Zwei-Ebenen-Planung von Kornai.

Dieses Verfahren stellt eine Variation der Methode der Zwei-Ebenen-Planung von Kornai dar. Mit Hilfe dieses Verfahrens kann man eine optimale Lösung beliebig gut approximieren. Allerdings ist die Konvergenz nicht monoton. Nach unserem Dafürhalten sprechen insbesondere folgende Punkte für die Effizienz dieses Verfahrens:

1. Der Algorithmus arbeitet nicht mit Basislösungen, sondern kann auch mit einer gewöhnlichen zulässigen Lösung anfangen. Insofern entfällt die Notwendigkeit, in einer Vorbereitungsphase eine zulässige Basislösung zu finden, wie das für Algorithmen notwendig ist, die auf dem Simplexverfahren basieren.

2. Wir erhalten in jeder Runde eine zulässige Lösung, von der wir auch wissen, um wieviel sie höchstens von der optimalen Lösung abweicht. Damit kann das Ergebnis jeder Iterationsrunde verwertet werden. In der Regel wird es sich nicht lohnen, die Zahl der Iterationsrunden allzu groß zu wählen, da das Verfahren in den ersten Runden sehr viel schneller konvergiert, als in den späteren.

3. Die zentrale Versorgungsaufgabe und die regionalen Produktionsaufgaben zerfallen in unabhängige Teilprobleme, die im Vergleich zum Umfang des ursprünglichen Problems sehr viel kleiner sind. In den regionalen Produktionsaufgaben brauchen nur diejenigen Restriktionen, die die immobilien Güter betreffen, berücksichtigt zu werden ($i = k+1, \dots, m$). Die zentrale Versorgungsaufgabe zerfällt in einfache Transportprobleme, die besonders einfach zu lösen sind.

4. Die regionalen Produktionsaufgaben verändern von einer Runde zu anderen lediglich ihre Zielfunktionen, so daß die optimale Lösung von der vorhergehenden Runde immer noch zulässig bleibt und als Ausgangspunkt benutzt werden kann. Damit reduziert sich die Zahl der Iterationen bei der Lösung von regionalen Produktionsaufgaben mindestens um 50 %.

5. Aufgrund der verwendeten Dekompositionsmethode ist es möglich, in jeder Runde der Iteration exogene Informationen in den Lösungsprozess mit einzubeziehen, ohne den Rechnungsablauf zu stören, oder von vorne beginnen zu müssen. Man kann z.B. bei der Lösung der zentralen Versorgungsaufgabe für bestimmte mobile Produkte eine größere Knappheit vorschreiben, indem man deren Import - (eventuell auch Export-)preise erhöht. Man

erhält auf diese Weise ein regionales Preissystem, das diese höhere Knappheit widerspiegelt. Regionale Produktionsaufgaben, die auf der Basis eines solchen manipulierten Preissystems konstruiert werden, erzeugen dann zulässige Produktionsprogramme, die diese erhöhte Knappheit berücksichtigen. Solche "Not-Produktionsprogramme" können ihrerseits jederzeit bei der Erarbeitung von eigentlichen Produktionsprogrammen verwendet werden, um diese in einer bestimmten Richtung zu variieren.

6. Eine, insbesondere aus anwendungstechnischer Sicht wichtige Verbesserung gegenüber dem Modell von Kornai besteht darin, daß a) die zentrale Versorgungsaufgabe immer lösbar ist und b) die regionalen Produktionsaufgaben immer lösbar sind, sobald die ursprüngliche Aufgabe 2.8 eine zulässige Lösung besitzt. Das bedeutet, daß keine "Regularitätsannahmen" notwendig sind. Bekanntlich erschwert das Problem der Regularität die Anwendung des Kornaischen Verfahrens erheblich¹⁾.

7. Der Wegfall der Regularitätsproblematik hängt mit der Vertauschung der Rolle der Zentrale und der regionalen Produktionseinheiten gegenüber dem Modell von Kornai. Während beim Modell von Kornai die Zentrale die Ressourcen zuteilt und die untergeordneten Instanzen aufgrund dieser Zuteilung die "lokalen" Preise feststellen, so daß auf der Basis dieser Preise eine Neuzuteilung erfolgt, werden in unserem Modell die Preise von der Zentrale festgestellt. Die Zuteilung von Ressourcen ist dagegen (in Form von Angebots- und Nachfragemengen) das Ergebnis der Optimierung der regionalen Produktionsaufgaben.

1) Hagelschuer, P.B., Theorie der Linearen Dekomposition (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 58) (Berlin, 1971), S. 155.

Die Zuteilung der Ressourcen durch die Zentrale wirkt bei Kornai das Problem der Lösbarkeit der regionalen Produktionsaufgaben auf. Das ist eben das Problem der Regularität des entsprechenden Matrixspiels¹⁾. In unserem Modell hingegen entsteht ein solches Problem nicht, da die zentrale Versorgungsaufgabe dank den Import- und Exportaktivitäten immer (unabhängig von der Höhe der regionalen Angebots- und Nachfragemengen) lösbar ist.

Neben den erheblichen Vorteilen in Bezug auf den Lösungsalgorithmus erreichen wir durch diesen Rollentausch eine Modellform, die den bekannten Annahmen der Mikroökonomie besser gerecht wird: Die Allokation vor Ressourcen erfolgt in der unteren Ebene (dezentral), die Feststellung der Preise dagegen in der Zentrale oder, wenn man so will, auf dem Markt.

1) Kornai, Mathematische Methoden, a.a.O. S. 464.

4. V A R I A T I O N E N D E S G R U N D M O D E L L S

Wir haben gesehen, daß das Modell 2.8 die Anwendung von einem effizienten Lösungsverfahren erlaubt, das außerdem als ein dynamischer Anpassungsprozess interpretiert werden kann. Nun wollen wir untersuchen, inwieweit dieses Verfahren auch auf andere Modelle anwendbar ist.

Die Modifikationen, die wir an unserem Grundmodell vornehmen wollen, betreffen die Zielfunktion des Modells. Wir versuchen alternative Interpretationsmöglichkeiten darzustellen, indem wir unterschiedliche Annahmen über die Zielfunktion machen.

4.1 Endogene Behandlung von Transportaktivitäten

Als erstes wollen wir, wie bereits angekündigt, zeigen, daß die endogene Behandlung der Transportaktivitäten möglich ist. Damit heben wir die einschränkende Annahme, daß die Transportaktivitäten keine Inputs verbrauchen und lediglich die Kosten verursachen, die in der Zielfunktion ausgewiesen sind, zugunsten einer allgemeineren Formulierung auf. Das bedeutet, daß die Transportaktivitäten nicht mehr als unabhängig von der Höhe der Produktionsaktivitäten betrachtet werden. Vielmehr können die Transportkosten variieren, je nachdem, ob die für die Transportleistungen benötigten Inputs reichlicher oder knapper werden. Auf diese Weise wird die wechselseitige Abhängigkeit zwischen den Transportkosten und den Produktpreisen, die wir in unserem Grundmodell nur in der einen Richtung berücksichtigt hatten (Transportkosten bestimmen die regionalen Preisdifferenzen), realitätsnäher als eine Wechselbeziehung erfaßt (Transportkosten bestimmen die regionalen Preisdifferenzen, die regionalen Preise wiederum bestimmen die Transportkosten).

Das Modell 2.8 wird wie folgt ergänzt: Jede Transportaktivität z_{1g}^{hg} (Transport des Gutes 1 von der Region h in die Region g) verbraucht pro Aktivitätsniveau a_{il}^{hg} Einheiten des Gutes i, wobei $l=1, \dots, k$ gilt. Der Koeffizient a_{il}^{hg} ist konstant, impliziert damit konstante Skalenerträge. Wir nehmen außerdem an, daß der Bedarf an Inputs für jede Transportaktivität in der Region gedeckt wird, in der sie endet. Es ist zu beachten, daß diese Annahme zu unterschiedlichen Transportkosten zwischen zwei Regionen für unterschiedliche Transportrichtungen führen kann, da die Inputpreise regional verschieden sind. Nun ergänzen wir die Gleichungen 2.8a im Modell 2.8, so daß wir das folgende Modell erhalten:

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_g^q z_i^{rg} - z_i^{rE} \gg -s_i^r \quad (4.1a)$$

$$-\sum_j^n v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + z_i^{Ir} - \sum_h^q \sum_l^k a_{il}^{hr} z_l^{hr} + \sum_d^u z_i^{dr} \gg d_i^r \quad (4.1b)$$

$$-z_i^{dr} \gg -s_i^{dr} \quad (4.1c)$$

$$i=1, \dots, k; r, g, h=1, \dots, q; d=1, \dots, u^r$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r \gg b_i^r \quad (4.1d)$$

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \gg 0 \quad (4.1e)$$

$$i=k+1, \dots, m; r=1, \dots, q$$

$$x_j^r, y^r, z_i^{hg}, z_i^{rE}, z_i^{Ir}, z_i^{dr} \gg 0$$

$$\sum_r^q \sum_j^n c_j^r x_j^r + \sum_r^q \sum_d^u \sum_i^k f_i^{dr} z_i^{dr} + \sum_r^q \sum_i^k f_i^{Ir} z_i^{Ir} - \sum_r^q \sum_i^k f_i^{rE} z_i^{rE} \rightarrow \text{Min} \quad (4.1f)$$

Das zu 4.1 duale Problem lautet:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r - c_j^r \omega^r \leq c_j^r \quad (4.2a)$$

$$-\sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r - \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r + \omega^r \leq 0 \quad (4.2b)$$

$$-G_\ell^h - \sum_{i=1}^k a_{i\ell}^{h,g} v_i^g + v_\ell^g \leq 0 \quad (4.2c)$$

$\ell = 1, \dots, k, \quad h, g = 1, \dots, q$

$$\sigma_i^r \geq f_i^{rE} \quad (4.2d)$$

$$v_i^r \leq f_i^{Ir} \quad (4.2e)$$

$$v_i^r - f_i^{dr} \leq f_i^{dr} \quad (4.2f)$$

$$\sigma_i^r, v_i^r, \pi_i^r, \omega^r, f_i^{dr} \geq 0$$

$$r=1, \dots, q; \quad d=1, \dots, u^r; \quad j=1, \dots, n; \quad i=1, \dots, k$$

$$-\sum_r^q \sum_i^k \sigma_i^r s_i^r + \sum_r^q \sum_i^k v_i^r d_i^r + \sum_r^q \sum_{i=k+1}^m \pi_i^r b_i^r - \sum_r^q \sum_i^k \sum_d^{u^r} f_i^{dr} s_i^{dr} \rightarrow \text{Max} \quad (4.2g)$$

Man sieht, daß die Transportkostenfaktoren f_1^{gh} durch die Ausdrücke $\sum_{i=1}^k a_{i\ell}^{hg} v_i^g$ ersetzt werden. Gleichzeitig zeigt es sich, daß wir für diese realistischere Modellform einen Preis entrichten müssen. Die Anwendung unseres Dekompositionsalgorithmus ist zwar immer noch möglich, aber die zentrale Versorgungsaufgabe, die zum Problem 4.1 entspricht, zerfällt nicht mehr in k unabhängige Transportprobleme für die k mobilen Güter, da die einzelnen Transportaktivitäten die gleichen Inputs benötigen und über die Veränderung von deren Preisen einander gegenseitig beeinflussen. Die Abhängigkeit der k -Transportaufgaben voneinander ist umso stärker, je größer die Zahl der Inputs ist, die von den Transportaktivitäten verbraucht werden. Darüber hinaus ergeben sich keine Änderungen. Das Problem kann immer noch in ein Matrixspiel umgeformt und mit der Methode des fiktiven Abspielens gelöst werden. Die kompliziertere Form der Versorgungsaufgabe würde die Anwendung des Dantzig und Wolfe Dekompositionsverfahrens nahelegen. In diesem Fall würden die Unterprogramme wieder Transportaufgaben darstellen, wir hätten ein Drei-Ebenen-Problem vor uns.

Es muß in jedem konkreten Fall geprüft werden, ob es sich lohnt, den größeren Rechenaufwand in Kauf zu nehmen, die endogene Behandlung der Transportaktivitäten zu wählen, oder ob man sich mit der einfacheren exogenen Behandlung begnügen kann.

Für praktische Probleme ist es wahrscheinlich zweckmäßiger, die Transportaktivitäten exogen zu behandeln und etwaige Rückwirkungen des Produktionsbereichs auf Transportkosten durch Alternative Annahmen über die Höhe der Transportkosten zu berücksichtigen. Durch unser

Lösungsverfahren ist der Einbau von exogenen Informationen unproblematisch. So können zum Beispiel in jeder Runde in der Zentrale mehrere Versorgungsaufgaben gelöst werden, die sich nur hinsichtlich der Transportkosten unterscheiden. Diese würden dann verschiedene Preissysteme ergeben, die wiederum zu alternativen regionalen Zielfunktionen führen. Man könnte auf diese Weise mehrere Probleme, die sich durch ihre Annahmen hinsichtlich der Höhe der Transportkosten unterscheiden, parallel lösen.

4.2 Maximierung einer gesellschaftlichen Nutzenfunktion mit konstanten Grenznutzen

Eine weitere Variante unseres Grundmodells 2.8 erhalten wir, wenn wir eine Zielfunktion maximieren, die ein bestimmtes Produktgemisch darstellt. Es liegt nahe, eine solche Zielfunktion als eine gesellschaftliche Nutzenfunktion zu interpretieren, wobei die einzelnen Koeffizienten der Zielfunktion die (konstanten) Grenznutzen der verschiedenen Güter darstellen. Zu diesem Zweck setzen wir in dem Modell 2.8 $c_j^r = 0.1$. Dann spielen die Exportpreise f_i^{re} die Rolle der Grenznutzen. Da die Transportaktivitäten exogen behandelt werden, werden die Transportkosten von dem Wert der Nutzenfunktion abgezogen. Die Differenz zwischen der Nutzenfunktion und den Transportkosten wird maximiert. Diese Vorgehensweise, die sich an die Modelle von Takayama und Judge anlehnt, kann verfeinert werden, indem man die Transportaktivitäten endogen behandelt. Hierzu müßten wir das Modell 4.1 entsprechend modifizieren, in dem wir hier $c_j^r = 0$ setzen:

$$\sum_j^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_i^q z_i^{r4} - \bar{z}_i^{re} \gg -s_i^r \quad (4.3a)$$

$$-\sum_j^n v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + \bar{z}_i^{ir} - \sum_h^q \sum_\ell^k a_{i\ell}^{hr} z_\ell^{hr} + \sum_d^u z_i^{dr} \gg d_i^r \quad (4.3b)$$

$$-\bar{z}_i^{dr} \gg -s_i^{dr} \quad (4.3c)$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r \geq b_i^r \quad (4.3d)$$

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \geq 0 \quad (4.3e)$$

$$x_j^r, y^r, z_i^{hr}, z_i^{rE}, z_i^{Ir}, z_i^{dr} \geq 0$$

$$\sum_r^q \sum_d^u \sum_i^k f_i^{dr} z_i^{dr} + \sum_r^q \sum_i^k f_i^{Ir} z_i^{Ir} - \sum_i \sum f_i^{rE} z_i^{rE} \rightarrow \text{Min} \quad (4.3f)$$

Es ist zu beachten, daß nicht einfach die Produktion, sondern die Nettoproduktion (= Produktion - Eigenverbrauch) maximiert wird. In der Regel wird man bei einer solchen Formulierung bestimmte Mindestmengen für die Nettoproduktion der einzelnen Güter vorschreiben. Diese Mindestmengen werden nun durch die Koeffizienten d_i^r dargestellt.

Diese kurzen Überlegungen zeigen, daß die Maximierung einer gesellschaftlichen Zielfunktion ohne Schwierigkeiten von unserem linearen Modell bewältigt werden kann. Die Anwendung des oben dargelegten Dekompositionsalgorithmus verläuft analog. Modelle dieser Art haben jedoch eine fundamentale Schwäche, von der auch das Modell 4.3 nicht frei ist. Es handelt sich um die Annahme der konstanten Grenznutzen. Diese Annahme ist nicht nur theoretisch unhaltbar, sie führt auch zu Verzerrungen der optimalen Lösung, da eine Zielfunktion mit konstanten Grenznutzen zu Einseitigkeiten und zu Übertreibungen neigt. Das Modell wird dazu tendieren, die Produktion der Produkte mit den höchsten Grenznutzen übermäßig auszudehnen und die Produktion der restlichen Güter auf die Mindestmengen zu beschränken.

Diese schwache Stelle kann durch die Benützung einer Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen vermieden werden. Hierzu werden in der Literatur zumeist quadratische Zielfunktionen verwendet. Im folgenden wollen wir zeigen, daß das gleiche Ergebnis auch mit Hilfe eines rein linearen Modells erreicht werden kann, das gegenüber dem quadratischen Modell erheblich leichter zu lösen ist.

4.3 Maximierung einer gesellschaftlichen Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen

Der Ansatz kann am besten verdeutlicht werden, wenn wir zunächst das Problem des Gleichgewichts auf einem einzigen Markt mit gegebenen Nachfrage- und Angebotsfunktionen betrachten.

4.31 Das Problem des Marktgleichgewichts als Optimierungsproblem

Die Formulierung des Marktgleichgewichts als Maximierungsproblem geht auf Samuelson zurück¹⁾. Auf seiner Arbeit aufbauend verwenden Takayama und Judge folgende Problemstellung: es sei eine Nachfrage- und eine Angebotsfunktion $p = D(x)$ und $p = S(x)$ gegeben. Dann kann das Problem des Marktgleichgewichts auch als

Maximiere $W!$

$$W = \int_0^{x_0} D(x) dx - \int_0^{x_0} S(x) dx$$

mit

schreiben.

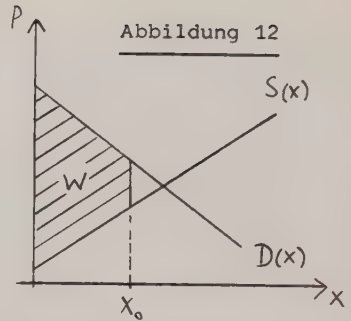
1) Samuelson, "Spatial Price Equilibrium", a.a.O.

Das entspricht der Maximierung
der Fläche W in der Abbildung 12.
Aus

$$\frac{dW}{dx} = 0$$

folgt die Gleichgewichtsbedingung

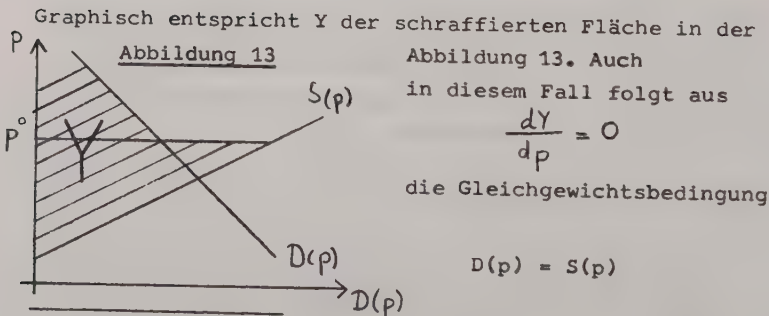
$$D(x) = S(x)$$



V.L. Smith ¹⁾ zeigt, daß das gleiche
Problem als Minimierungsaufgabe formuliert werden kann:

Minimiere $Y!$
mit

$$Y = \int_{p_0}^{\infty} D(p) dp + \int_0^{p_0} S(p) dp$$



¹⁾ Smith, V. L., "Minimization of Economic Rent in Spatial Price Equilibrium," The Review of Economic Studies, 30 (1963), S. 24-31.

Im Abschnitt 2 oben hatten wir gezeigt, wie treppenförmige Nachfrage- und Angebotsfunktionen konstruiert werden können, um das Problem des Marktgleichgewichts als Minimierungsproblem zu formulieren. Allgemein, wenn wir differenzierbare Funktionen verwenden, können wir dieses Modell wie folgt schreiben¹⁾

Z!

$$Z = \int_0^{x_0} S(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} D(x) dx$$

Die Abbildung 14 zeigt die Fläche Z (schraffiert), die minimiert wird. Die Minimierungsbedingung

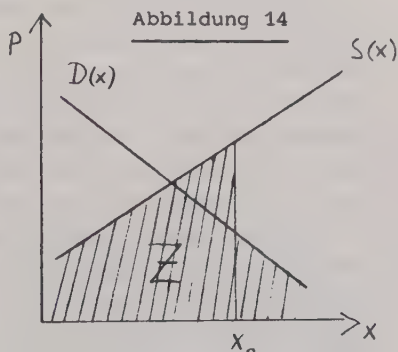
$$\frac{dZ}{dx} = 0$$

führt auch hier zur Gleichgewichtsbedingung:

$$Z = \int_0^{x_0} S(x) dx - \int_{\infty}^{x_0} D(x) dx$$

$$\frac{dZ}{dx} = S(x) - D(x)$$

$$\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow S(x) = D(x)$$



¹⁾ Zur Erleichterung des Vergleichs mit den zitierten Ansätzen verwenden wir zunächst differenzierbare Funktionen

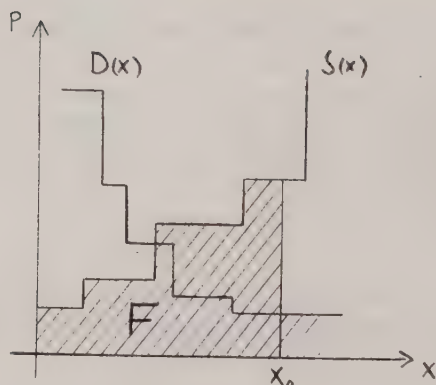


Abbildung 15

Bei Verwendung von Treppenfunktionen ergeben sich keine wesentlichen Änderungen. Die Abbildung 15 zeigt die in diesem Fall zu minimierende Fläche F . Bekanntlich haben Marshall und später Hicks den Versuch unternommen, mit Hilfe der Nachfragekurve einen Konsumentenüberschuß zu definieren. Demnach wird das Dreieck C in Abbildung 16 als ein Maß für den Konsumentenüberschuß verwendet, vorausgesetzt, daß die Nachfragekurve und der Marktpreis $\bar{p}$ gegeben sind und die Kardinalität des Nutzens unterstellt wird. In Anlehnung an diese Terminologie können wir die Fläche $C + G$ als realisierten Nutzen und das Dreieck E als entgangenen Nutzen bezeichnen. Mit anderen Worten, das Dreieck E bringt den Teil des Gesamtnutzens zum Ausdruck der von den Nachfragern nicht erlangt werden konnte. Aufgrund dieser Überlegung ist es zweckmäßig, die Fläche unter der Nachfragekurve in zwei Teile zu zerlegen, von denen N_R den realisierten, N_E den entgangenen Nutzen darstellt, wie dies in Abbildung 17 geschah.

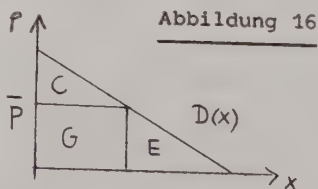


Abbildung 16

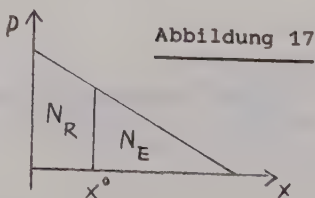
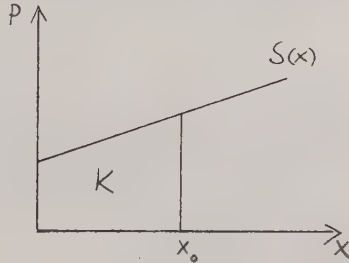


Abbildung 17

Hierbei stellt x_0 die konsumierte Menge dar. Analog können wir die Fläche K unter der Angebotskurve als die Summe der variablen Kosten auffassen, die zur Produktion der betreffenden Menge x_0 notwendig sind. Dementsprechend bedeutet unsere Formulierung des Marktgleichgewichts als Minimierungsaufgabe die Minimierung der Summe der Kosten und des entgangenen Nutzens. Nun gilt $N_R + N_E = \text{const.}$ und damit

Abbildung 18



$$\frac{dN_R}{dx} + \frac{dN_E}{dx} = 0$$

$$\frac{dN_R}{dx} = - \frac{dN_E}{dx}$$

Außerdem

$$N_E = \int_{x_0}^{\infty} D(x) dx = - \int_{\infty}^{x_0} D(x) dx$$

daraus folgt

$$\frac{dN_E}{dx} = - D(x)$$

und

$$\frac{dN_R}{dx} = -\frac{dN_E}{dx} = D(x)$$

$$\frac{dN_R}{dx} = D(x)$$

Mit anderen Worten, der Grenznutzen ist gleich dem Preis $D(x)$. Desgleichen folgt aus

$$K = \int_0^{x_0} S(x) dx \qquad \frac{dK}{dx} = S(x)$$

Damit impliziert die Gleichgewichtsbedingung $S(x)=D(x)$ in unserem Modell

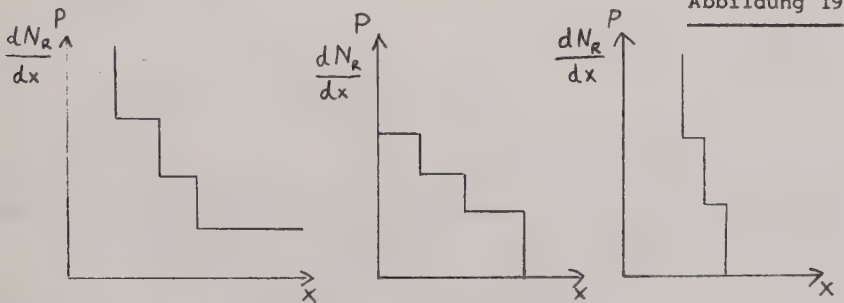
$$\frac{dK}{dx} = \frac{dN_R}{dx}$$

i.e. Grenznutzen = Grenzkosten.

4.32 Lineare Formulierung der Nutzenfunktion mit abnehmenden Grenznutzen

Ausgehend von gegebenen Nachfragefunktionen haben wir gezeigt, daß diese wohlfahrtstheoretisch interpretiert werden können. Interessanter scheint uns jedoch dieser

Zusammenhang in der umgekehrten Richtung zu sein. Wenn wir eine bestimmte (gesellschaftliche) Nutzenfunktion postuliert haben¹⁾, können wir die dazu entsprechende Form der Nachfragekurven für die einzelnen Produkte aufgrund der obigen Überlegungen bestimmen. Dies geschieht, indem wir die angenommene Grenznutzenfunktion für jedes Gut durch unsere Treppenfunktionen approximieren. Die fiktiven Kosten f_i^{dr} stellen die Grenznutzen für entsprechende Nachfragemengen dar. Unter Beachtung der Einschränkung, daß der Grenznutzen eines Gutes nur von der konsumierten Menge dieses Gutes abhängen darf, können wir Nutzenfunktionen mit monoton abnehmenden Grenznutzen im Rahmen eines linearen Modells berücksichtigen. Die Abbildung zeigt drei Beispiele für solche Grenznutzenfunktionen.



Wir modifizieren das Modell 2.8 in geeigneter Weise, um die Maximierung einer entsprechenden Nutzenfunktion zu gewährleisten. Die c_j^r werden gleich 0 gesetzt. Die Transportaktivitäten werden endogen behandelt. Selbstverständlich ist es auch möglich, die Transportaktivitäten exogen zu behandeln, in diesem Fall würde die Differenz zwischen der Nutzenfunktion und den Transportkosten maximiert. Wir erhalten das Modell

1) Unabhängig davon, ob diese explizit formuliert worden ist oder nicht, impliziert jede wirtschaftspolitische Aktivität eine bestimmte gesellschaftliche Nutzenfunktion.

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^r x_j^r - \sum_g^q z_i^{rg} - \bar{z}_i^{rE} \geq -S_i^r \quad (4.4a)$$

$$-\sum_{j=1}^n v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + \bar{z}_i^{Ir} - \sum_h^q \sum_l^k a_{il}^{hr} z_l^{hr} + \sum_{d=1}^{u^r} z_i^{dr} \geq d_i^r \quad (4.4b)$$

$$- \bar{z}_i^{dr} \geq -S_i^{dr} \quad (4.4c)$$

$$i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q; \quad d=1, \dots, u^r$$

$$\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r \geq b_i^r \quad (4.4d)$$

$$-\sum_j^n e_j^r x_j^r + y^r \geq 0 \quad (4.4e)$$

$$i=k+1, \dots, m; \quad r=1, \dots, q$$

$$x_j^r, y^r, z_i^{hg}, \bar{z}_i^{rE}, \bar{z}_i^{Ir}, z_i^{dr} \geq 0$$

$$\sum_r^q \sum_d^{u^r} \sum_i^k z_i^{dr} f_i^{dr} + \sum_r^q \sum_i^k \bar{z}_i^{Ir} - \sum_r^q \sum_i^k \bar{z}_i^{rE} f_i^{rE} \rightarrow \text{Min} \quad (4.4f)$$

Dual hierzu:

$$\sum_{i=1}^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_{i=1}^k v_{ij}^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r - e_j^r \omega^r \leq 0 \quad (4.5a)$$

$$j = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, q$$

$$-\sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r - \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r + \omega^r \leq 0 \quad (4.5b)$$

$$r = 1, \dots, q$$

$$-\sigma_\ell^h - \sum_{i=1}^k a_{i\ell}^{hg} v_i^g + v_\ell^g \leq 0 \quad (4.5c)$$

$$h, g = 1, \dots, q; \quad \ell = 1, \dots, k$$

$$\sigma_i^r \geq f_i^{rE} \quad (4.5d)$$

$$v_i^r \leq f_i^{Ir} \quad (4.5e)$$

$$v_i^r - p_i^{dr} \leq f_i^{dr} \quad (4.5f)$$

$$\sigma_i^r, v_i^r, \pi_i^r, \omega^r, p_i^{dr} \geq 0$$

$$-\sum_r^q \sum_i^k s_i^r \sigma_i^r + \sum_r^q \sum_i^k d_i^r v_i^r + \sum_r^q \sum_i^k b_i^r \pi_i^r$$

$$-\sum_d^{n^r} \sum_r^q \sum_i^k s_i^{dr} p_i^{dr} \rightarrow \text{Max} \quad (4.5g)$$

Zur Aufstellung des Modells 4.4 müssen folgende Annahmen gemacht werden:

I. Bezüglich der Produktion:

- a) Die Produktionsfunktion für jede Region ist linear und in Form von Produktionskoeffizienten p_{ij}^r , v_{ij}^r , a_{ij}^r und den Wertschöpfungskoeffizienten e_j^r gegeben.
- b) Die Produktionsaktivitäten beeinflussen einander nur über die Preise der gemeinsamen Inputs. Andere Externe Effekte sind ausgeschlossen.

II. Bezüglich der Nachfrage:

- a) In den einzelnen Regionen ist die marginale Konsumneigung t_i^r für jedes Gut bekannt und konstant.
- b) Für jede Region und für jedes Gut ist die Grenznutzenfunktion bekannt. Diese Funktionen sind voneinander unabhängig. Mit wachsendem Einkommen nehmen die Grenznutzen zu, so daß zum gleichen Preis mehr nachgefragt wird.

III. Bezüglich der Transportindustrie:

Die Technologie der Transportindustrie ist in Form von gegebenen Inputkoeffizienten a_{il}^{gh} bekannt und konstant. Auf einer gegebenen Strecke sind die Inputmengen der transportierten Mengen proportional. Steigende Skalenerträge mit zunehmender Länge der Transportstrecke sind möglich.

Das Modell beantwortet folgende Fragen:

Welches Gut wird wo produziert?

Welche Produktionsaktivitäten werden in den einzelnen Regionen benützt?

Wie groß ist das zusätzliche Einkommen in jeder Region?

Wie groß ist die Endnachfrage nach jedem Gut in den einzelnen Regionen?

Welche Güter werden von den einzelnen Regionen exportiert beziehungsweise importiert?

Wie hoch ist der nationale Import beziehungsweise Export an einzelnen Gütern?

Wie hoch sind die regionalen Preise der einzelnen Güter?

Wie hoch sind die Renten für die immobilen Ressourcen der Regionen?

Um welchen Faktor müssen die Einkommen in den einzelnen Regionen angepaßt werden, damit die Budgetgleichung der Haushalte eingehalten werden kann?

Wie verlaufen die Handelsströme zwischen den Regionen?

Wie hoch sind die Transportkosten auf den einzelnen Strecken?

Bei der Beantwortung der obigen Fragen berücksichtigt das Modell folgende Faktoren:

1. Der unterschiedliche Inputbedarf und die unterschiedliche Outputstruktur der einzelnen Produktionsaktivitäten
2. Der unterschiedliche Inputbedarf der einzelnen Transportaktivitäten und damit die Transportkosten.
3. Die Verteilung der Ressourcen im Raum.
4. Die Erhöhung der Inputpreise in den Regionen, in denen sich die Produktionsaktivitäten konzentrieren.
5. Die Vorteile der räumliche Nähe zu den vor- und nachgelagerten Produktionsstufen.
6. Die Erhöhung der regionalen Einkommen durch Agglomeration.
7. Die unterschiedliche Einkommenselastizität der verschiedenen Güter
8. Die unterschiedliche Preiselastizität der einzelnen Güter.

Dagegen können folgende Faktoren nicht berücksichtigt werden:

1. Positive Interne Ersparnisse
2. Agglomerationsvorteile (mit Ausnahme der Effekte, die in den Punkten 6 - 7 oben zum Ausdruck kommen)
3. Kreislaufzusammenhänge
4. Effekte, die ihren Ursprung im monetären Bereich haben.
5. Faktorbewegungen.

Zur Interpretation des Modells 4.4 geben wir noch die Optimalitätsbedingungen an:

4.6

$$\sigma_i^r \left(\sum_j^n p_{ij}^r x_j - \sum_g^q z_i^{rg} - z_i^{rE} + s_i^r \right) = 0 \quad i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q \quad (4.6a)$$

$$v_i^r \left(- \sum_{j=1}^n v_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r + \sum_h^q z_i^{hr} + z_i^{Ir} - \sum_h^q \sum_{\ell}^k a_{i\ell}^{hr} z_{\ell}^{hr} + \sum_{d=1}^u z_i^{dr} - d_i^r \right) = 0 \quad (4.6b)$$

$$i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q$$

$$p_i^{dr} (s_i^{dr} - z_i^{dr}) = 0 \quad i=1, \dots, k; \quad r=1, \dots, q \quad (4.6c)$$

$$\pi_i^r \left(\sum_j^n a_{ij}^r x_j^r - t_i^r y^r - b_i^r \right) = 0 \quad i=1, \dots, k \quad (4.6d)$$

$$r=1, \dots, q$$

$$\omega^r (y^r - \sum_j^n e_j^r x_j^r) = 0 \quad r=1, \dots, q \quad (4.6e)$$

$$x_j^r \left(\sum_i^k p_{ij}^r \sigma_i^r - \sum_i^k v_{ij}^r v_i^r + \sum_{i=k+1}^m a_{ij}^r \pi_i^r - e_j^r \omega^r \right) = 0 \quad (4.6f)$$

$$j = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, q$$

$$y_j^r \left(\omega^r - \sum_{i=1}^k t_i^r v_i^r - \sum_{i=k+1}^m t_i^r \pi_i^r \right) = 0 \quad r = 1, \dots, q \quad (4.6g)$$

$$z_l^{hg} \left(v_l^g - \sigma_l^h - \sum_{i=1}^k a_{il}^{hg} v_i^g \right) = 0 \quad (4.6h)$$

$$h, g = 1, \dots, q; \quad l = 1, \dots, k$$

$$z_i^{rE} \left(f_i^{rE} - \sigma_i^r \right) = 0 \quad i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q \quad (4.6i)$$

$$z_i^{Ir} \left(v_i^r - f_i^{Ir} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, k; \quad r = 1, \dots, q \quad (4.6j)$$

$$z_i^{dr} \left(v_i^r - f_i^{dr} - g_i^{dr} \right) = 0 \quad (4.6k)$$

$$i = 1, \dots, k, \quad d = 1, \dots, u^r;$$

$$r = 1, \dots, q$$

Die Bedingungen 4.6a - 4.6e implizieren, daß die Preise $\sigma_i^r, v_i^r, \pi_i^r$ und ω^r nur dann positiv sein können, wenn die entsprechenden Restriktionen des primalen Problems als Gleichung erfüllt sind. Mit anderen Worten, immer wenn in einer Region von einem Gut ein Überschuß vor-

handen ist, das nicht verbraucht und auch nicht verschickt wird, wird dessen Preis gleich Null sein. Die Bedingungen 4.6f - 4.6l fordern das gleiche bezüglich der primalen Aktivitäten. Die Bedingung 4.6f fordert, daß eine Produktionsaktivität x_j^r nur dann einen positiven Wert hat, wenn die Erlöse gleich der Summe der Ausgaben für die Vorprodukte, der Lohnsumme und den Rentenzahlungen an immobile Güter ist.

Die Bedingung 4.6g kann man, wie bereits oben erwähnt, als Budgetbeschränkung interpretieren. Sie besagt, daß in jeder Region die Kosten einer zusätzlichen Einkommenseinheit gleich der Summe der Ausgaben sein muß, die infolge dieser Einkommenssteigerung getätigt werden. Man kann ω^r auch als einen Anpassungsfaktor interpretieren, mit dem die Einkommen beziehungsweise die Löhne in jeder Region an die regionalen Preise v_i^r und π_i^r so angepaßt werden, so daß die Konsumenten in der Lage sind, ihre postulierten Konsumgewohnheiten aufrechtzuerhalten.

Die Bedingung 4.6h sichert, daß ein Gut 1 von einer Region h in die Region g nur dann transportiert wird, wenn der Preis v_ℓ^g in der importierenden Region g gleich der Summe des Preises σ_ℓ^h in der exportierenden Region und den Transportkosten $\sum_i^k a_{il}^{hg} v_i^g$ ist.

Hierbei bestimmt sich die Höhe der Transportkosten als die Summe der Ausgaben, die je Einheit der Transportaktivität für Transportinputs notwendig sind.

Die Bedingung 4.6i bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß der Preis eines Gutes in einer gegebenen Region nie kleiner als dessen Exportpreis sein kann, da sonst die gesamte verfügbare Menge dieses Gutes exportiert werden würde. Wenn der Preis höher als der Exportpreis ist, finden keine Exporte statt. Somit spielen die Exportpreise die Rolle von Mindestpreisen. Analog bedeutet 4.6k, daß der regionale Preis eines Gutes

nie höher als dessen Importpreis sein kann, da es sonst billiger wäre, den gesamten Bedarf zu importieren. Wenn die Importpreise höher als die Inlandspreise sind, sind die Einfuhren gleich 0. Die Importpreise stellen somit gleichzeitig Höchstpreise dar.

Die Interpretation der Bedingung 4.61 ist etwas umständlicher. Im allgemeinen gilt:

$$v_i^r = \int_i^{dr} + f_i^{dr}$$

Für einen bestimmten d , d^* , wird jedoch $\int_i^{d^*} = 0$ und damit $v_i^r = f_i^{d^*r}$ gelten. Dabei bezieht sich d^* auf diejenige fiktive Aktivität mit einem positiven Wert, die den höchsten Koeffizienten f_i^{dr} hat. $f_i^{d^*r}$ stellt somit den Grenznutzen dar, der der effektiv nachgefragten Menge

$$d_i^r - (s_i^{1r} + s_i^{2r} + \dots + s_i^{d^*r})$$

entspricht. Somit sehen wir, daß der Grenznutzen $f_i^{d^*r}$ und der Preis v_i^r gleich sind, und zwar für alle Regionen und alle Güter.

5. MATHEMATISCHE ASPEKTE

5.1 Beweis der Konvergenz

In diesem Abschnitt wollen wir einen Beweis für die Konvergenz des entwickelten Lösungsverfahrens angeben. Für unsere Argumentation bedienen wir uns der Matrixschreibweise. In einem ersten Schritt werden eine Reihe von Definitionen gegeben. Danach zeigen wir, daß das Problem 2.8 in ein äquivalentes Matrixspiel umgeformt werden kann. Dieser Nachweis bildet das Kernstück unserer Argumentation. In diesem Zusammenhang werden einige Hilfssätze und Sätze bewiesen.

Da es bekannt ist, daß ein Matrixspiel immer durch die Methode des fiktiven Abspielens gelöst werden kann und unser Verfahren einem solchen fiktiven Abspielen entspricht, folgt die behauptete Konvergenz.

Wir beginnen mit den folgenden Definitionen:

$$P^r = [p_{ij}^r] \quad i = 1, \dots, k \quad r = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, n$$

$$V^r = [v_{ij}^r] \quad i = 1, \dots, k \quad r = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, n$$

$$A^r = [a_{ij}^r] \quad i = k+1, \dots, m \quad r = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, n$$

Darüber hinaus benötigen wir folgende Vektoren
(Zeilenvektoren sind mit einem ' gekennzeichnet):

$$e^{r'} = (e_1^r, \dots, e_n^r)$$

$$f^{gh'} = (f_1^{gh}, \dots, f_k^{gh})$$

$$c^{r'} = (c_1^r, \dots, c_n^r)$$

$$f^{dr'} = (f_1^{dr}, \dots, f_k^{dr})$$

$$t^{r'} = (t_1^r, \dots, t_k^r)$$

$$f^{Ir'} = (f_1^{Ir}, \dots, f_k^{Ir})$$

$$\underline{t}^{r'} = (t_{km}^r, \dots, t_m^r)$$

$$f^{rE'} = (f_1^{rE}, \dots, f_k^{rE})$$

$$s^{r'} = (s_1^r, \dots, s_k^r)$$

$$x^{r'} = (x_1^r, \dots, x_n^r)$$

$$d^{r'} = (d_1^r, \dots, d_k^r)$$

$$z^{hg'} = (z_1^{hg}, \dots, z_k^{hg})$$

$$b^{r'} = (b_{k+1}^r, \dots, b_m^r)$$

$$z^{rE'} = (z_1^{rE}, \dots, z_k^{rE})$$

$$\bar{z}^{Ir'} = (\bar{z}_1^{Ir}, \dots, \bar{z}_k^{Ir})$$

$$\bar{z}^{dr'} = (\bar{z}_1^{dr}, \dots, \bar{z}_k^{dr})$$

y^r ist ein Skalar.

Aufgrund dieser Definitionen können wir die Aufgabe 2.8 wie folgt schreiben:

$$p^r x^r - \sum_g^q z^r g - z^r E \gg -s^r \quad (5.1a)$$

$$-V^r x^r - t^r y^r + \sum_h^q z^{hr} + z^{Ir} + \sum_d^u z^{dr} \gg d^r \quad (5.1b)$$

$$-z^{dr} \gg -s^{dr} \quad (5.1c)$$

$$A^r x^r - t^r y^r \gg b^r \quad (5.1d)$$

$$-e^r x^r + y^r \gg 0 \quad (5.1e)$$

$$x^r, y^r, z^{hg}, z^{Ir}, z^{rE}, z^{dr} \gg 0$$

$$\sum_r^q c^r x^r + \sum_g^q \sum_h^q f^{gh} z^{gh} + \sum_r^q \sum_d^u f^{dr} z^{dr}$$

$$+ \sum_r^q f^{Ir} z^{Ir} - \sum_r^q f^{rE} z^{rE} \longrightarrow \text{Min} \quad (5.1f)$$

$$r, g, h = 1, \dots, q; d = 1, \dots, u$$

X

sei die Menge der zulässigen Lösungen von 5.1.

Um die zu 5.1 duale Aufgabe formulieren zu können, benötigen wir noch folgende Definitionen:

$$G^r = (G_1^r, \dots, G_k^r) \quad V^r = (V_1^r, \dots, V_k^r)$$

$$\pi^r = (\pi_{k+1}^r, \dots, \pi_m^r) \quad \rho^{dr} = (\rho_1^{dr}, \dots, \rho_k^{dr})$$

ω^r ist ein Skalar.

Die Aufgabe 2.9 (dual zu 2.8) in der Matrixform:

$$G^r P^r - V^r V^r + \pi^r A^r - \omega^r e^r \leq c^r \quad (5.2a)$$

$$-V^r t^r - \pi^r \underline{t}^r + \omega^r \leq 0 \quad (5.2b)$$

$$-G^{h'} + V^{g'} \leq f^{hg'} \quad (5.2c)$$

$$G^{r'} \geq f^{rE'} \quad (5.2d)$$

$$V^{r'} \leq f^{Ir'} \quad (5.2e)$$

$$V^{r'} - \rho^{dr'} \leq f^{dr'} \quad (5.2f)$$

$$G^r, V^r, \pi^r, \rho^{dr} \geq 0; \quad r, g, h = 1, \dots, q; \quad d = 1, \dots, u^r$$

$$\sum_r^q \left[-G^r s^r + V^r d^r + \pi^r b^r - \sum_a^{u^r} \rho^{dr'} s^{dr} \right] \rightarrow \text{Max} \quad (5.2g)$$

Π

sei die Menge der zulässigen Lösungen von 5.2.

Nun können wir auch die restlichen Probleme in die Matrixform bringen. Die zentrale Versorgungsaufgabe lautet:

$$-\sum_g \bar{z}^g \quad -\bar{z}^{rE} \quad \gg -s^r - P^r x^r \quad (5.3a)$$

$$\sum_h \bar{z}^{hr} + \bar{z}^{Ir} + \sum_d \bar{z}^{dr} \quad \gg d^r + V^r x^r + t^r y^r \quad (5.3b)$$

$$-\bar{z}^{dr} \quad \gg -s^{dr} \quad (5.3c)$$

$$\bar{z}^{hg}, \bar{z}^{rE}, \bar{z}^{Ir}, \bar{z}^{dr} \gg 0 \quad h, g, r = 1, \dots, q; d = 1, \dots, u^r$$

$$\sum_h \sum_g f^{hg'} \bar{z}^{hg} + \sum_r \sum_d f^{dr'} \bar{z}^{dr} + \sum_r f^{Ir'} \bar{z}^{Ir}$$

$$- \sum_r f^{rE'} \bar{z}^{rE} \longrightarrow \text{Min} \quad (5.3d)$$

$Z(x^r, y^r)$ sei die Menge der zulässigen Lösungen, wobei zu beachten ist, daß diese Menge von (x^r, y^r) ($r=1, \dots, q$) abhängt.

Die zu 5.3 duale Aufgabe lautet:

$$-c^{h'} + v^{g'} \leq f^{hg'} \quad (5.4a)$$

$$c^{r'} \geq f^{rE'} \quad (5.4b)$$

$$v^{r'} \leq f^{Ir'} \quad (5.4c)$$

$$v^{r'} - p^{dr'} \leq f^{dr'} \quad (5.4d)$$

$$c^r, v^r, p^{dr} \geq 0 \quad r, h, g = 1, \dots, q; d = 1, \dots, u^r$$

$$\sum_r^q c^{r'}(-s^r - p^{rx'}) + \sum_r^q v^{r'}(d^r + v^{rx'} + t^{ry'}) - \sum_r^q \sum_d^{u^r} p^{dr'} s^{dr} \rightarrow \text{Max} \quad (5.4e)$$

Ω sei die Menge der zulässigen Lösungen von 5.4. Im Gegensatz zur Lösungsmenge der Aufgabe 5.3 ist die Lösungsmenge Ω von 5.4 unabhängig von den Werten von (x^r, y^r) . Die regionale Produktionsaufgabe 3.17, die sich aus q unabhängigen Aufgaben zusammensetzt, schreiben wir als:

$$\left. \begin{aligned}
 A^r x^r - \underline{t}^r y^r &\geq b^r & (5.5a) \\
 -e^r x^r + y^r &\geq 0 & (5.5b) \\
 x^r, y^r &\geq 0 \\
 (c^r + v^r V^r - \sigma^r P^r) x^r &+ v^r \underline{t}^r y^r \longrightarrow \text{Min} & (5.5c)
 \end{aligned} \right\} r=1, \dots, q$$

R sei die Menge der zulässigen Lösungen von 5.5.
 Die duale regionale Produktionsaufgabe lautet:

$$\left. \begin{aligned}
 \pi^r A^r - \omega^r e^r &\leq c^r + v^r V^r - \sigma^r P^r & (5.6a) \\
 -\pi^r \underline{t}^r + \omega^r &\leq v^r \underline{t}^r & (5.6b) \\
 \pi^r, \omega^r &\geq 0 \\
 \pi^r b^r &\longrightarrow \text{Max} & (5.6c)
 \end{aligned} \right\} r=1, \dots, q$$

Wir zeigen jetzt, wie das ursprüngliche Problem 2.8 in ein Minimaxproblem umgeformt werden kann. Die Aufgabe 5.1, die mit 2.8 identisch ist, können wir auch wie folgt schreiben. Diese Formulierung unterstreicht unsere Absicht, den Produktionsbereich und den Transportbereich abwechselnd zu optimieren:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere}_{\mathbf{R}} \left\{ \sum_r c^r x^r + \text{Minimiere}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r)} \left\{ \sum_g \sum_h f^{hg'} \frac{1}{2} h g \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_r \sum_d u^r f^{dr'} \frac{1}{2} d r + \sum_r f^{Ir'} \frac{1}{2} I r - \sum_r f^{rE'} \frac{1}{2} r E \right\} \right\} \quad (5.7) \end{aligned}$$

Aufgrund des Dualitätssatzes¹⁾ gilt jedoch

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r)} \left\{ \sum_g \sum_h f^{hg'} \frac{1}{2} h g + \sum_r \sum_d u^r f^{dr'} \frac{1}{2} d r + \sum_r f^{Ir'} \frac{1}{2} I r - \sum_r f^{rE'} \frac{1}{2} r E \right\} \\ = \text{Max}_{\Omega} \left\{ \sum_r \left[c^r (-s^r - p^r x^r) + v^r (d^r + V^r x^r + t^r y^r) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_d u^r f^{dr'} \frac{1}{2} s^r d r \right] \right\} \end{aligned}$$

1) Goldman, A.J. und Tucker, A.W., "Theory of Linear Programming," in: Linear Inequalities and Related Systems, Hrgb. H.W. Kuhn und A.W. Tucker (Princeton, 1956) (Annals of Mathematical Studies, 38), S.59 f.

Infolgedessen können wir statt 5.7 auch

$$\begin{aligned} \text{Min}_R \left\{ \sum_r^q c^r x^r + \text{Max}_{\Omega} \left\{ \sum_r^q \left[c^r (-s^r - p^r x^r) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + v^r (d^r + V^r x^r + t^r y^r) - \sum_d^u p^{dr} s^{dr} \right] \right\} \right\} \quad (5.8) \end{aligned}$$

schreiben. Damit wird der Optimierungsbereich des inneren Problems unabhängig von der Lösung des äußeren Problems. Oder:

$$\begin{aligned} \text{Min}_R \text{Max}_{\Omega} \left\{ \sum_r^q \left[c^r x^r + c^r (-s^r - p^r x^r) + v^r (d^r + V^r x^r + t^r y^r) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_d^u p^{dr} s^{dr} \right] \right\} \quad (5.9) \end{aligned}$$

Als nächstes beweisen wir folgende Hilfssätze, die wir für unsere Argumentation benötigen:

Hilfssatz I: R ist nicht leer, wenn das ursprüngliche Problem 2.8 eine zulässige Lösung hat.

Beweis: Durch Vergleich der Restriktionen der regionalen Produktionsaufgabe 5.5 mit den Restriktionen der ursprünglichen Aufgabe 5.1 erkennt man, daß X eine echte Teilmenge von R ist. Daraus folgt unmittelbar, daß R nicht leer sein kann, wenn X nicht leer ist.

Hilfssatz II: Ω ist nicht leer.

Beweis: Die duale zentrale Versorgungsaufgabe hat immer eine Lösung. Eine solche Lösung erhält man zum Beispiel, indem man

$$p^{dr} = v^r = 0 \quad \text{und} \quad \sigma^r = f^{rE} \quad \begin{matrix} (r=1, \dots, q \\ d=1, \dots, u^r) \end{matrix}$$

setzt.

Hilfssatz III: R ist beschränkt.

Beweis: Die Beschränktheit von R kann immer erreicht werden, indem man die Variablen der regionalen Produktionsaufgabe nach oben beschränkt. Dabei müssen diese oberen Schranken genügend groß gewählt werden, sodaß der ökonomisch sinnvolle Bereich von R erhalten bleibt.

Hilfssatz IV: Ω ist beschränkt.

Beweis: Nehmen wir an, daß Ω unbeschränkt ist. Dann hätte die Aufgabe 5.4 für bestimmte Zielfunktionen (mit geeigneten Werten von (x^r, y^r)) kein endliches Maximum; sie würde gegen ∞ streben. Das impliziert wiederum aufgrund des Dualitätssatzes, daß die Aufgabe 5.3 für ebensolche Werte von (x^r, y^r) keine zulässige Lösung hat. $Z(x)$ ist aber immer nicht leer, unabhängig davon, wie (x^r, y^r) gewählt wird. Eine solche Lösung erhält man immer dann, wenn

$$z^{hg} = z^{dr} = 0 \quad h, g, r = 1, \dots, q; \quad d = 1, \dots, u^r$$

sowie

$$z^{rE} = s^r + p^r x^r \quad z^{Ir} = d^r + v^r x^r + t^r y^r$$

gesetzt wird. Damit ergibt sich ein Widerspruch und wir haben gezeigt, daß Ω beschränkt sein muß.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß das Minimaxproblem 5.9 einem Matrixspiel äquivalent ist. Zu diesem Zweck wollen wir das Problem 5.9 in ein Minimaxproblem umformen, dessen Variablen Wahrscheinlichkeitsvektoren sind¹⁾.

Wir definieren folgende Vektoren und Matrizen:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} & y &= \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^q \end{pmatrix} & t &= \begin{pmatrix} t^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & t^q \end{pmatrix} & p &= \begin{pmatrix} p^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & p^q \end{pmatrix} \\
 (n \cdot q \times 1) & & (q \times 1) & & (k \cdot q \times q) & & (k \cdot q \times n \cdot q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{pmatrix} V^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & V^q \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^q \end{pmatrix} & s &= \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ \vdots \\ s^q \end{pmatrix} & d &= \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^q \end{pmatrix} \\
 (k \cdot q \times n \cdot q) & & (q \cdot n \times 1) & & (k \cdot q \times 1) & & (k \cdot q \times 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \vdots \\ \sigma^q \end{pmatrix} & \tau &= \begin{pmatrix} \tau^1 \\ \tau^2 \\ \vdots \\ \tau^q \end{pmatrix} \\
 (q \cdot k \times 1) & & (q \cdot k \times 1)
 \end{aligned}$$

1) Das sind Vektoren, deren Elemente alle positiv sind und sich zu 1 addieren.

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} p^{11} \\ \vdots \\ p^{u_1} \\ \vdots \\ p^{12} \\ \vdots \\ p^{u_2} \\ \vdots \\ p^{1q} \\ \vdots \\ p^{u_q} \end{array} \right) \\
 (p \cdot q \cdot k \times 1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} s^{11} \\ \vdots \\ s^{u_1} \\ \vdots \\ s^{12} \\ \vdots \\ s^{u_2} \\ \vdots \\ s^{1q} \\ \vdots \\ s^{u_q} \end{array} \right) \\
 (p \cdot q \cdot k \times 1)
 \end{array}$$

wobei

$$p = \sum_r^q u^r$$

Mit anderen Worten,
p ist die Zahl der
fiktiven Angebotspunkte
im Modell.

Aufgrund dieser Vereinbarungen können wir 5.9 auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \text{Min}_{R} \quad \text{Max}_{\Omega} \quad & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -p & ? \\ V & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right. \\
 & \left. + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -\underline{s} \end{pmatrix} \right\} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Satz I: Die Minimaxaufgabe 5.10 ist mit dem Problem 5.1 äquivalent.

Diesen Satz beweisen wir, indem wir folgende drei Punkte beweisen:

1. Wenn $(x', y') \in R$ und $(\sigma', v', p') \in \Omega$ die Gleichgewichtslösung von 5.10 sind, so sind (x', y', z') eine optimale Lösung von 5.1. Dabei ist z' die zu (σ', v', p') entsprechende Lösung von 5.3.
2. Umgekehrt, wenn (x', y', z') eine optimale Lösung von 5.1 und (σ', v', p', π') die entsprechende duale optimale Lösung sind, so sind (x', y') und (σ', v', p') eine Gleichgewichtslösung von 5.10.
3. Der Wert θ von 5.10 ist gleich dem optimalen Wert der Zielfunktion von 5.1, ξ^* . Dabei ist θ wie folgt definiert.

$$\theta = \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -\underline{s} \end{pmatrix} \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -\underline{s} \end{pmatrix} \right\} \\ & \leq \\ & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -\underline{s} \end{pmatrix} \right\} \\ & \leq \\ & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\sigma', v', p') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -\underline{s} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R$ und $\begin{pmatrix} \sigma \\ v \\ p \end{pmatrix} \in \Omega$

Beweis:

1. Wir zeigen zuerst, daß jede Gleichgewichtslösung von 5.10 eine optimale Lösung von 5.1 liefert. $(\bar{x}, \bar{y})$ und $(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p})$ seien eine Gleichgewichtslösung von 5.10. Es gilt dann wegen der ersten Ungleichung der Voraussetzung:

$$\left[(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \right] \left[\begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -z \end{pmatrix} \right] \geq \left[(\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \right] \left[\begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -z \end{pmatrix} \right]$$

für alle $(\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \in \Omega$

Das heißt, $(\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}')$ ist optimal für die duale Versorgungsaufgabe 5.4, wenn $\bar{x} = \bar{x}, \bar{y} = \bar{y}$ gilt.

Umgekehrt folgt aus der zweiten Ungleichung unserer Voraussetzung:

$$\left\{ (\bar{c}, \bar{c}') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

$\leq$

$$\left\{ (\bar{c}, \bar{c}') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}') \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

für alle $(\bar{x}', \bar{y}') \in R$. Das bedeutet, daß $(\bar{x}', \bar{y}')$ die Summe der Produktions- und Transportkosten minimiert, wenn $(\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}')$ der Vektor der regionalen Preise ist. Das kann man sofort sehen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß der Ausdruck 5.10 mit dem Ausdruck 3.8a (Vgl. S.49 oben) identisch ist. Da wir die Optimalität des Preisvektors bereits gezeigt haben, folgt, daß $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ optimal für 5.1 ist.

2. Nun zeigen wir, daß jede optimale Lösung $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ von 5.1 eine Gleichgewichtslösung von 5.10 liefert. $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ und $(\bar{c}', \bar{v}', \bar{p}', \bar{\pi}')$ seien optimale Lösungen

von 5.1 bzw. 5.2. Dann gilt aufgrund der Optimalität von $(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{\pi})$ für 5.2, daß der gleiche Preisvektor auch für 5.4 mit $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ optimal ist. Daraus folgt wiederum

$$[(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p})] \left[\begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right] \leq [(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p})] \left[\begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right]$$

Wenn wir auf beiden Seiten dieser Ungleichung

$$(c', o') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

addieren, erhalten wir daraus den ersten Teil der Behauptung:

$$\begin{aligned} & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right\} \\ & \leq \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Da $(\bar{x}, \bar{y})$ für 5.1 optimal ist, muß er die Summe der Produktions- und Transportkosten minimieren, sofern die optimalen Preise $(\bar{c}, \bar{v}, \bar{p})$ herrschen. Daraus folgt sofort der zweite Teil der Behauptung:

$$\begin{aligned} & \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right\} \\ & \leq \left\{ (c', o') \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{v}, \bar{p}) \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Damit haben wir die ersten beiden Teile unseres Satzes bewiesen. Der dritte Teil, der die Gleichheit von θ und ξ behauptet, wird sofort ersichtlich, wenn wir uns daran erinnern, daß 5.10 die Summe der Transport- und Produktionskosten darstellt, oder mit anderen Worten, mit dem Ausdruck 3.8a identisch ist.

Es wurde bewiesen, daß die Minimaxaufgabe 5.10 dem ursprünglichen Problem 5.1 äquivalent ist. Wir beweisen jetzt, daß die Minimaxaufgabe 5.10 ihrerseits in ein Matrixspiel umgeformt werden kann, von dem wir wissen, daß es immer eine Gleichgewichtslösung und optimale Strategien hat. Für diese Umformung definieren wir folgende Größen:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} \sigma \\ r \\ \rho \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} -s \\ d \\ -s \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ v & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann lautet die Minimaxaufgabe 5.10

$$\min_{u \in R} \max_{w \in \Omega} \left\{ b'u + w'Az + w'e \right\} \quad 5.11$$

Die Mengen R und Ω sind konvex. Außerdem wissen wir aufgrund der Hilfssätze III und IV, daß sie beschränkt sind. Daher können wir jedes Element dieser Mengen als eine Linearkombination ihrer Basislösungen (Eckpunkte) darstellen. Beide Mengen haben endlich viele Basislösungen. Wir bezeichnen diese mit R_i ($i=1, \dots, \psi$) und Ω_j , ($j=1, \dots, \chi$). μ und λ seien Wahrscheinlichkeitsvektoren mit ψ beziehungsweise χ Komponenten.

Wir bilden die Matrizen:

$$\bar{R} = (R_1, R_2, \dots, R_\psi)$$

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega'_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_x \end{pmatrix}$$

Wir können jetzt jedes Element aus R oder Ω auch so ausdrücken:

$$u = \bar{R}_\mu$$

$$\omega = \bar{\Omega}' \lambda$$
(5.12)

Durch Einsetzen in 5.11 erhalten wir:

$$\min_{\mu} \max_{\lambda} \{ b' \bar{R}_\mu + \lambda' \bar{\Omega} A \bar{R}_\mu + \lambda' \bar{\Omega} e \}$$
(5.13)

Wir definieren:

$$b' \bar{R} = \bar{b}' \quad \bar{\Omega} A \bar{R} = \bar{A} \quad \bar{\Omega} e = \bar{e}$$

Dann können wir 5.13 auch wie folgt schreiben:

$$\min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \bar{b}'_\mu + \lambda' \bar{A}_\mu + \lambda' \bar{e} \}$$
(5.14)

Wir definieren:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}'_1 \\ \bar{b}'_2 \\ \vdots \\ \bar{b}'_x \end{pmatrix} \quad \bar{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_x)$$
(5.15)

Wie man sieht, hat die Matrix $\bar{B}$ identische Zeilen, die Matrix $\bar{E}$ hat identische Spalten. Die Zahl der Zeilen von $\bar{B}$ entspricht der Zahl der Zeilen von $\bar{A}$. Die Zahl der Spalten von $\bar{E}$ entspricht der Zahl der Spalten von $\bar{A}$, sodaß folgende Matrixaddition definiert ist:

$$\bar{B} + \bar{A} + \bar{E} = \bar{M}$$
(5.16)

Nun beweisen wir den folgenden:

Satz II: Die Minimaxaufgabe 5.14 ist identisch mit dem folgenden Matrixspiel mit gemischten Strategien:

$$\min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \lambda' \bar{M} \mu \} \quad (5.17)$$

Beweis: Durch Einsetzen von 5.16 in 5.17 erhalten wir:

$$\lambda' \bar{B} \mu + \lambda' \bar{A} \mu + \lambda' \bar{E} \mu$$

Aufgrund der Definition von $\bar{B}$ und $\bar{E}$ sowie aufgrund der Tatsache, daß λ und μ Wahrscheinlichkeitsvektoren sind, gilt

$$\lambda' \bar{B} = \bar{b}' \quad \text{und} \quad \bar{E} \mu = \bar{e} \quad (5.18)$$

somit folgt:

$$\{ \lambda' \bar{M} \mu \} = \{ \bar{b}' \mu + \lambda' \bar{A} \mu + \lambda' \bar{e} \}.$$

Umgekehrt können wir aufgrund von 5.18 immer statt 5.14

$$\min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \lambda' \bar{B} \mu + \lambda' \bar{A} \mu + \lambda' \bar{E} \mu \}$$

schreiben. Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \bar{b}' \mu + \lambda' \bar{A} \mu + \lambda' \bar{e} \} &= \min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \lambda' \bar{B} \mu + \lambda' \bar{A} \mu + \lambda' \bar{E} \mu \} \\ &= \min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \lambda' (\bar{B} + \bar{A} + \bar{E}) \mu \} = \min_{\mu} \max_{\lambda} \{ \lambda' \bar{M} \mu \}, \end{aligned}$$

sodaß die Identität bewiesen ist.

Damit haben wir die ursprüngliche Aufgabe 5.1 als Matrixspiel mit gemischten Strategien formuliert. Da jedes Matrixspiel einen Gleichgewichtspunkt und optimale Strategien hat¹⁾, haben wir damit gleichzeitig gezeigt, daß 5.14 einen Gleichgewichtspunkt und optimale Strategien besitzt. Die Auszahlungsmatrix des Spiels 5.17 ist jedoch unbekannt. Da M sehr groß sein wird, hat es keinen Sinn, eine direkte Lösung zu versuchen. Die Anwendung der Methode des fiktiven Abspielens ist jedoch möglich²⁾. Die im Teil 3 beschriebene Iterationsmethode entspricht einem solchen Verfahren. Da bekannt ist, daß die Methode des fiktiven Abspielens konvergiert, ist damit auch die Konvergenz des im Teil 3 angegebenen Iterationsverfahrens gesichert.

5.2 Das Kriterium zur Beendigung der Iteration:

Zunächst bringen wir einige Größen, die im Teil 3 definiert wurden, in die Matrixschreibweise. Der in der τ -ten Runde erreichte Wert der Zielfunktion $\xi^{(\tau)}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi^{(\tau)} = & \sum_r \frac{q}{r} c_r / X_r^{(\tau)} + \sum_h \sum_g \frac{q}{g} f^{gh} / \frac{*}{z}^{gh} + \sum_r \sum_d \frac{q}{d} u_r^{dr} / \frac{*}{z}^{dr} \\ & + \sum_r \frac{q}{r} f^{Ir} / \frac{*}{z}^{Ir} - \sum_r \frac{q}{r} f^{rE} / \frac{*}{z}^{rE} \end{aligned}$$

-
- 1) Vgl. Goldman und Tucker, "Theory of Linear Programming", a.a.O. S. 75, Theorem 3.
 - 2) In Anlehnung an Kornai, Mathematische Methoden, a.a.O. S. 466. Für eine Beschreibung und Beweis der Konvergenz der Methode des fiktiven Abspielens, Vgl. die dort angegebene Literatur.

Die in der τ -ten Runde festgestellte untere Grenze für den (unbekannten) optimalen Wert der Zielfunktion lautet:

$$\xi_{\tau} = \sum_r \left[\left(c^r + \gamma^r / V^r - \theta^r / P^r \right) x^r + \gamma^r / t^r y^r \right] + \sum_r \left[-\theta^r / s^r + \gamma^r / d^r - \sum_d \int^r d^r / s^r \right]$$

Um zu beweisen, daß in jeder Runde der Iteration ξ_{τ} eine untere Grenze für den optimalen Wert der Zielfunktion ergibt, zeigen wir, daß in jeder Runde die dualen Variablen π^r, ω^r , die der optimalen Lösung der dualen regionalen Produktionsaufgabe 5.6 entsprechen, zusammen mit den Preisen $\theta^r, \gamma^r, \int^r$ der dualen zentralen Versorgungsaufgabe 5.4 eine zulässige duale Lösung für die Aufgabe 5.2 liefern. Da wir aufgrund des Dualitätssatzes wissen, daß jede zulässige duale Lösung eine untere Grenze für den optimalen Wert der primalen Zielfunktion darstellt, folgt die Behauptung.

Beweis:

1. $(\theta^r, \gamma^r, \int^r)$ mit $r=1, \dots, q; d=1, \dots, u^r$ ist zulässig bezüglich der Aufgabe 5.4. Damit ist diese Lösung auch zulässig bezüglich der Restriktionen 5.2c, 5.2d, 5.2e und 5.2f der Aufgabe 5.2, da diese mit den Restriktionen der Aufgabe 5.4 identisch sind.
2. (π^r, ω^r) bilden eine optimale Lösung der Aufgabe 5.6 für die in der τ -ten Runde gegebenen Preise $(\theta^{r-1}, \gamma^{r-1})$. Da sie gleichzeitig eine zulässige Lösung von 5.6 darstellen, gilt:

$$\pi^r / A^r - \omega^r / e^r \leq c^r + \gamma^r / V^r - \theta^r / P^r$$

$$\pi^r / t^r + \omega^r \leq \gamma^r / d^r$$

$$\pi^r, \omega^r \geq 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_r^{(r)} \delta_r^r P^r - \sum_r^{(r)} \gamma_r^r V^r + \sum_r^{(r)} \pi_r^r A^r - \sum_r^{(r)} \omega_r^r e^r &\leq c^r \\ - \sum_r^{(r)} \gamma_r^r t^r - \sum_r^{(r)} \pi_r^r \underline{t}^r + \sum_r^{(r)} \omega_r^r &\leq 0 \\ \pi_r^r, \omega_r^r &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit sehen wir, daß $\sum_r^{(r)} \delta_r^r, \sum_r^{(r)} \gamma_r^r, \sum_r^{(r)} \pi_r^r, \sum_r^{(r)} \omega_r^r$ eine zulässige Lösung bezüglich 5.2a und 5.2b darstellen.

Aus den Ergebnissen in 1 und 2 folgt, daß $\sum_r^{(r)} \delta_r^r, \sum_r^{(r)} \gamma_r^r, \sum_r^{(r)} \pi_r^r, \sum_r^{(r)} \omega_r^r$ zulässig für 5.2 ist. Aus dem Dualitätssatz folgt dann, daß

$$\sum_r^{(r)} \xi_r^r = - \sum_r^{(r)} \delta_r^r s^r + \sum_r^{(r)} \gamma_r^r d^r - \sum_r^{(r)} \sum_d^{(r)} \int \frac{dr}{s} \frac{dr}{d} + \sum_r^{(r)} \pi_r^r b^r$$

eine untere Grenze für den optimalen Wert der Zielfunktion der Aufgabe 5.1 liefert. Da aufgrund des Dualitätssatzes

$$\sum_r^{(r)} \pi_r^r b^r = \sum_r^{(r)} \left[\left(c^r + \gamma_r^r V^r - \delta_r^r P^r \right) x_r^r + \gamma_r^r t^r y_r^r \right]$$

gilt, können wir auch

$$\begin{aligned} \sum_r^{(r)} \xi_r^r &= \sum_r^{(r)} \left[\left(c^r + \gamma_r^r V^r - \delta_r^r P^r \right) x_r^r + \gamma_r^r t^r y_r^r \right] \\ &+ \sum_r^{(r)} \left[- \delta_r^r s^r + \gamma_r^r d^r - \sum_d^{(r)} \int \frac{dr}{s} \frac{dr}{d} \right] \end{aligned}$$

schreiben.

5.3 Die Beziehung zur Partitionsmethode von Benders¹⁾

Zum Schluß gehen wir kurz auf die Beziehungen zwischen unserem Verfahren und dem Algorithmus von Benders ein. Um die wesentlichen Aspekte besser sichtbar zu machen, betrachten wir die folgende, vereinfachte Aufgabe:

$$\begin{aligned} A_1 x + F z &\geq b_1 \\ A_2 x &\geq b_2 \\ x, z &\geq 0 \\ c'x + d'z &\rightarrow \text{Min} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Dabei seien x , z , b_1 , b_2 , c und d Spaltenvektoren, A_1 , A_2 und F Matrizen, die passend definiert sind. Wie man erkennt, entspricht der erste Teil dieser Aufgabe dem Produktionsbereich und der zweite Teil dem Transportbereichs unseres Modells 5.1. Für feste Werte von x erhalten wir die zentrale Versorgungsaufgabe

$$\begin{aligned} F z &\geq b_1 - A_1 x \\ z &\geq 0 \\ d'z &\rightarrow \text{Min} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Lösbarkeit von 5.20 sei durch die Einführung von entsprechenden Import- und Exportaktivitäten gesichert.

Dual zu 5.20 definieren wir

$$\begin{aligned} \pi_1' F &\leq d' \\ \pi_1 &\geq 0 \\ \pi_1' (b_1 - A_1 x) &\rightarrow \text{Max} \end{aligned} \quad (5.21)$$

¹⁾ Benders, "Partitioning Procedures", a.a.O.

π sei die Menge der zulässigen Lösungen von 5.21. Wir vereinbaren außerdem

$$Q = \{x \mid A_2 x \geq b_2, x_2 \geq 0\}$$

Wir sind nun in der Lage, die Aufgabe 5.19 in eine Minimaxaufgabe umzuformen:

$$\min_{x \in Q} \max_{\pi_1 \in \pi} \{c'x + \pi_1'(b_1 - A_1 x)\}$$

Diese Umformung, die zu unserem Ausdruck 5.10 entspricht, stellt die Grundlage des Algorithmus von Benders dar.

Da jedes Element von π als eine Linearkombination von endlich vielen Basislösungen (Eckpunkten) dargestellt werden kann, genügt es, statt über der ganzen Menge π nur über deren Basislösungen π_i , $i=1, \dots, n$; zu maximieren:

$$\min_{x \in Q} \max_{1 \leq i \leq n} \{c'x + \pi_i'(b_1 - A_1 x)\}$$

Das aber ist äquivalent zu dem folgenden Problem:

$$A_2 x \geq b_2 \tag{5.22a}$$

$$c'x + \pi_i'(b_1 - A_1 x) \leq y \quad i=1, \dots, n \tag{5.22b}$$

$$x \geq 0$$

$$y \longrightarrow \min \tag{5.22c}$$

Das Problem 5.22 entspricht zu unserer regionalen Produktionsaufgabe 5.5. Da die Zahl der Basislösungen n sehr groß sein kann, wird auch die Zahl der Restriktionen 5.22b sehr groß sein. Dieses Problem löst Benders, indem er nicht alle Restriktionen 5.22b gleichzeitig betrachtet, sondern diese nach Bedarf durch die Lösung des Problems 5.21 erzeugt. Dies führt zu einem iterativen Verfahren, in dem die Probleme 5.21 und 5.22 abwechselnd gelöst werden.

Im Laufe dieser Iteration wird die Aufgabe 5.22 durch Hinzufügung immer neuer Restriktionen vergrößert, oder mit anderen Worten, dessen Lösungsmenge wird immer mehr eingeschränkt. Die Hinzufügung von neuen Restriktionen bedeutet für unser Modell, daß die ursprüngliche block-diagonale Struktur des Produktionsbereichs zerstört wird. Die regionalen Produktionsaufgaben können daher nicht mehr einzeln gelöst werden.

In unserem Verfahren wird die Struktur des Produktionsbereichs erhalten, da wir statt der Aufgabe 5.22, die Aufgabe 5.23 lösen. Hierbei stellt der Vektor $\bar{y}^{(r)}$ einen Durchschnitt der Basislösungen von 5.21 dar, die im Laufe der Iteration errechnet wurden.

5.23

$$\begin{aligned} A_2 x &\geq b_2 \\ x &\geq 0 \\ c'x + \bar{y}^{(r)}(b_1 - A_1 x) &= y \\ y &\rightarrow \text{Min} \end{aligned}$$

mit

$$\bar{y}^{(r)} = \frac{1}{r} [\pi^1 + \pi^2 + \dots + \pi^r]$$

Indem wir den Einfluß des Transportbereichs (Problem 5.20) nicht mit Hilfe von neuen Restriktionen, sondern mit Hilfe von Variationen der Zielfunktion berücksichtigen, ist es möglich, eine erheblich bessere Dekomposition zu erzielen.

Dafür müssen wir in Kauf nehmen, daß das Verfahren nicht mehr monoton (wie dies bei dem Algorithmus von Benders der Fall ist) konvergiert.

6. A B S C H L I E S S E N D E B E M E R K U N G E N

Wir beenden unsere Ausführungen mit einer kurzen Erörterung der wichtigsten Ergebnisse und weiterführender Fragestellungen.

Ausgehend von den bekannten linearen standorttheoretischen Modellen haben wir gesehen, wie diese durch einkommens- und preiselastische Nachfragefunktionen ergänzt werden können, ohne auf die Vorteile der Linearität verzichten zu müssen. Anschliessend versuchten wir eine nutzen-theoretische Interpretation, die uns erlaubt, abnehmende Grenznutzen im Rahmen linearer Modelle zu berücksichtigen.

Eine andere Interpretationsmöglichkeit, die im Verlauf unserer Diskussion ausgeklammert bleiben mußte, war die Anwendung der Modelle auf Probleme mit der Dimension Zeit. Es wäre zu untersuchen, welche Implikationen insbesondere aus dem vorgeschlagenen Lösungsverfahren für eine solche Interpretation gewonnen werden können.

Die Entwicklung von effizienten Lösungsalgorithmen nahm in unseren Ausführungen einen großen Raum ein. Es gelang uns, einen Algorithmus anzugeben, der eine sehr weitgehende Dekomposition des ursprünglichen Problems erlaubt und damit die Konstruktion von detaillierten Modellen sinnvoll macht. Die Stärke dieses Algorithmus liegt in der vollen Ausnutzung der günstigen Struktur unseres Modells. Neben dem praktischen Nutzen dieses Dekompositionsverfahrens konnten wir auf die Interpretation als ein Anpassungsprozeß auf räumlich getrennten Märkten, oder als ein dezentrales Entscheidungsmodell, verweisen. Es zeigt sich, daß dieser Anpassungsprozeß unter den gegebenen Annahmen über das Verhalten der Marktteilnehmer stabil ist.

Eine Frage, die im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden konnte, die jedoch einen Ansatzpunkt für weiterführende Überlegungen zu bieten scheint, betrifft den Zusammenhang zwischen den Stabilitätsbedingungen unseres Modells mit den Stabilitätsbedingungen von allgemeineren Gleichgewichtssystemen.

Die Anwendung des entwickelten Algorithmus auf praktische Problemstellungen und die Konkretisierung unserer Modelle an Hand von empirischem Material können Themen für weitere Untersuchungen liefern.

VERZEICHNIS DER ZITIERTEN WERKE

- S. Aleshin und V. Mednitzki, "Algorithm Problems in an Interregional Interindustry Model," Papers of the Regional Science Association, 24 (1970), S. 171-181.
- A. Arianin und S. Nikolaev, "Interregional and Intra-Regional Analysis of the Location of Productive Forces," Papers of the Regional Science Association, 24 (1970), S. 163-170.
- M. Beckmann und T. Marschak, "An Activity Analysis Approach to Location Theory," in: Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Hrsg. H. A. Antosiewicz. Washington, D.C., 1955, S. 357-377.
- J. F. Benders, "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems," Numerische Mathematik, 4 (1962), S. 238-252.
- E. von Böventer, "Die Struktur der Landschaft. Versuch einer Synthese und Weiterentwicklung der Modelle J. H. von Thünen, W. Christaller und A. Löschs," in: R. Henn, G. Bombach und E. von Böventer, Optimales Wachstum und Optimale Standortverteilung, Schriften des Vereins für Sozialpolitik, N.F. Bd. 27. Berlin, 1962, S. 77-133.
- Theorie des Räumlichen Gleichgewichts. Tübingen, 1962.
- "Spatial Organization Theory as a Basis for Regional Planning," Journal of the American Institute of Planners, 30 (1964), S. 90-100.
- "City Size Systems: Theoretical Issues, Empirical Regularities and Planning Guides," Urban Studies, 10 (1973), S. 145-162.
- R. Carrillo-Arronte, An Empirical Test on Interregional Planning. Rotterdam, 1970.
- P.A. Cornelisse, Price Consistency in Development Planning. Rotterdam, 1973.
- G.B. Dantzig, Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin, 1966.

- R. H. Day, "Recursive Programming Models: A Brief Introduction," in: Studies in Economic Planning over Space and Time, Hrsg. G. G. Judge und T. Takayama. Amsterdam, 1973, S. 329-344.
- R. Dorfman, P. A. Samuelson und R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1956.
- A.J. Goldman und A.W. Tucker, "Theory of Linear Programming," in: Linear Inequalities and Related Systems (Annals of Mathematical Studies, 38), Hrsg. H.W. Kuhn und A.W. Tucker. Princeton, 1956. S. 53-97.
- P. B. Hagelschuer, Theorie der Linearen Dekomposition. (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 58.) Berlin, 1971.
- W. Isard und T.W. Langford, Regional Input - Output Study: Recollections, Reflections and Diverse Notes on the Philadelphia Experience. Cambridge, Mass., 1971.
- G. G. Judge und T. Takayama, Hrsg. Studies in Economic Planning over Space and Time. Amsterdam, 1973.
- J. Kornai, Mathematische Methoden bei der Planung der Ökonomischen Struktur. Berlin, 1967.
- L. Lefebvre, Allocation in Space. Amsterdam, 1958.
- L.B.M. Mennes, J. Tinbergen und J.G. Waardenburg, The Element of Space in Development Planning. Amsterdam, 1968.
- P. A. Samuelson, "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming," American Economic Review, 42 (1952), S. 283-303.
- J. Schumann, Input - Output - Analyse. Berlin, 1968.
- E. Silberberg, "A Theory of Spatially Separated Markets," International Economic Review, 11 (1970), S. 334-348.
- V. L. Smith, "Minimization of Economic Rent in Spatial Price Equilibrium," The Review of Economic Studies, 30 (1963), S. 24-31.
- B. H. Stevens, "An Interregional Linear Programming Model," Journal of Regional Science, 1 (1959), S. 60-98.
- T. Takayama und G. G. Judge, "Equilibrium Among Spatially Separated Markets: A Reformulation," Econometrica, 32 (1964), S. 510-524.
- Spatial and Temporal Price and Allocation Models. Amsterdam, 1971.

LEBENS LAUF

Ich bin am 14.6.1945 in Istanbul geboren. Nach der Volksschule besuchte ich die Deutsche Schule in Istanbul. Mein erster Aufenthalt in der Bundesrepublik Deutschland fiel in die Zeit zwischen 1958 und 1959. Ich wohnte zusammen mit meinen Eltern in Stuttgart, wo mein Vater als Gastprofessor an der TH Stuttgart tätig war.

1962 reiste ich mit einem Stipendium des American Field Service in die USA, wo ich das High School Diplom erwarb. Nach meiner Rückkehr in die Türkei machte ich im Frühjahr 1965 Abitur an der Deutschen Schule in Istanbul.

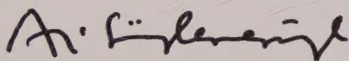
Im Wintersemester 1965/66 begann ich als DAAD Stipendiat mit dem Studium der Volkswirtschaft an der Ludwig-Maximilians-Universität München. Die Diplomprüfung legte ich im Herbsttermin 1970 ab. Im Februar 1971 begann ich mit meiner Dissertation bei Professor E. von Böventer. Zugleich wurde ich als Verwalter der Dienststelle eines wissenschaftlichen Assistenten an der staatswirtschaftlichen Fakultät der Universität München angestellt.

Ende 1971 heiratete ich Nerkes Akcora. Im August 1975 wurde unser Sohn Mustafa Nazim geboren.

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

14.11.1975

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Ali Söylemezoglu', written in a cursive style.

Ali Söylemezoglu

